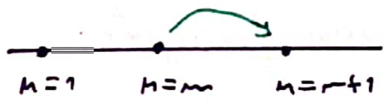
Cálculo I

Números Reais. Sucessões

Princípio de indução matemática:

Técnica de demonstração para mostrar que uma proposição P é verdadeira em $\mathbb{N}$

- Mostrar que $P(1)$ é verdadeira
- Se $P(m)$, $m \in \mathbb{N}$ é verdadeira mostrar que $P(m+1)$ é verdadeira



ex: Provar $1^3 + \dots + m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$
por princípio de indução

Hipotese: $1^3 + \dots + m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$

Tese: $1^3 + \dots (m+1)^3 = \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$

$$1^3 + \dots + m^3 + (m+1)^3$$
$$= \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3$$
$$= \frac{m^2(m+1)^2 + 4(m+1)^3}{4}$$
$$= \frac{(m+1)^2(m^2+4m+4)}{2}$$
$$= \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2 \text{ cqd}//$$

Axioma do Supremo:

Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não vazio tem supremo em $\mathbb{R}$

ex: $A =]-1, 1]$

O ínfimo de A é -1
O mínimo de A não existe, pois $-1 \notin A$

O supremo de A é 1
O máximo de A é 1, pois $1 \in A$

teorema

Em qualquer intervalo $]a,b[= I \subset \mathbb{R}$ não degenerado há um conjunto infinito de racionais e um conjunto infinito de irracionais, i.e., $I \cap \mathbb{Q}$ e $I \cap \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ são conjuntos infinitos

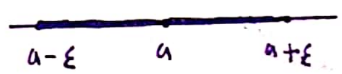
Sucessão limitada:

$$\underset{a,b \in \mathbb{R}}{\exists} \; \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \; a \leq u_n \leq b \qquad \underset{c \in \mathbb{R}^+}{\exists} \; \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \; |u_n| \leq c$$

Sucessão Convergente:

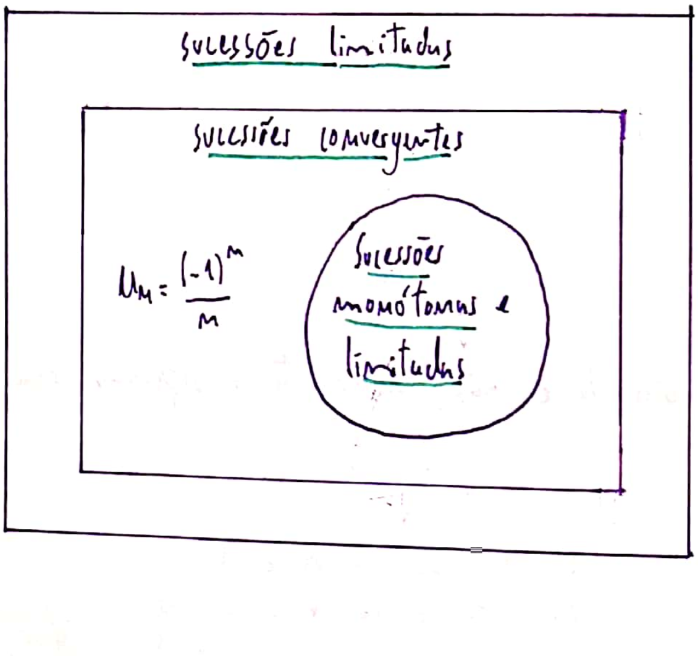
$$\underset{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}{\forall} \; \underset{p \in \mathbb{N}}{\exists} \; n > p : u_n \in V_\varepsilon(a)$$

$V_\varepsilon(a)$ $\quad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$



teorema

Qualquer sucessão convergente é limitada



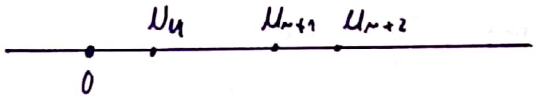
u_n sucessão limitada $\Rightarrow$ u_n sucessão convergente

$\not\Leftarrow$

u_n é uma sucessão contrativa

existe $0 < c < 1$ tal que

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq c\,|u_{n+1} - u_n| \quad n \geq 1$$



Proposição

Se u_n é uma sucessão contrativa então é uma sucessão convergente

Proposição Sucessões enquadradas

Sejam as sucessões u_n, v_n, z_n tais que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > p \quad u_n \leq z_n \leq v_n$$

Se as sucessões u_n e v_n são convergentes com o mesmo limite $a \in \mathbb{R}$, então:

- z_n é uma sucessão convergente
- $\lim z_n = a$

Cálculo de limites em $\overline{\mathbb{R}}$ | $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Seja u_n uma sucessão de termos positivos tal que exista em $\overline{\mathbb{R}}$

$$l = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

- Se $l < 1$ então u_n converge e $\lim u_n = 0$
- Se $1 < l \leq +\infty$ então u_n converge em $\overline{\mathbb{R}}$ e $\lim u_n = +\infty$

$\boxed{\text{tem-se uma escala de sucessões} \quad n^b \ll c^n \ll n! \ll n^n \quad b>0,\ c>1}$

Dica:
limite sucessão definida por recorrência
ex: $u_{n+1} = 4u_n + 1$
$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$
$l = 4l + 1 \Leftrightarrow -1 = 3l$
$\Leftrightarrow l = -\frac{1}{3}$

ex: $\lim \frac{n^n}{n^b} = +\infty$

$\lim \frac{c^n}{n!} = 0$

Seja u_n uma sucessão de termos positivos:
Então se u_{n+1}/u_n converge em $\overline{\mathbb{R}}$ também converge $\sqrt[n]{u_n}$ em $\overline{\mathbb{R}}$
e

$$\boxed{\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}}$$

sucessão composta de u_n com $v_n \in \mathbb{N}$

$$(u \circ v)_n = u(v(n)) = u(v_n) = u_{v_n}$$

w_n subsucessão de u_n

existe
- $v_n \in \mathbb{N}$
- v_n: estritamente crescentes ($v_n < v_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$)

$$w_n = u_{v_n}$$

ex: $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

- $v_n = n+2$

$$w_n = u_{n+2} = (-1)^n \frac{n+2}{n+3}$$

$\boxed{\text{Qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é convergente para o mesmo limite.}}$

→ Qualquer subsucessão de uma sucessão limitada é limitada

→ Qualquer subsucessão de uma sucessão monótona é monótona

Teorema de Bolzano Weierstrass

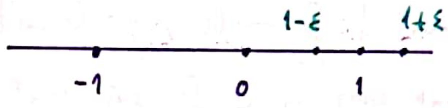
> toda a sucessão limitada tem uma subsucessão convergente

$a \in \mathbb{R}$ sublimite de u_n

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{n>p}{\exists}\ u_n \in V_\varepsilon(a)$$

ex: $u_n = (-1)^n$ tem sublimites?

R: 1 e -1 são sublimites



(Normalmente só há sublimites em funções em que quando n = par é uma coisa e n = ímpar é outra).

$a \in \mathbb{R}$ limite de u_n

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>p}{\forall}\ u_n \in V_\varepsilon(a)$$

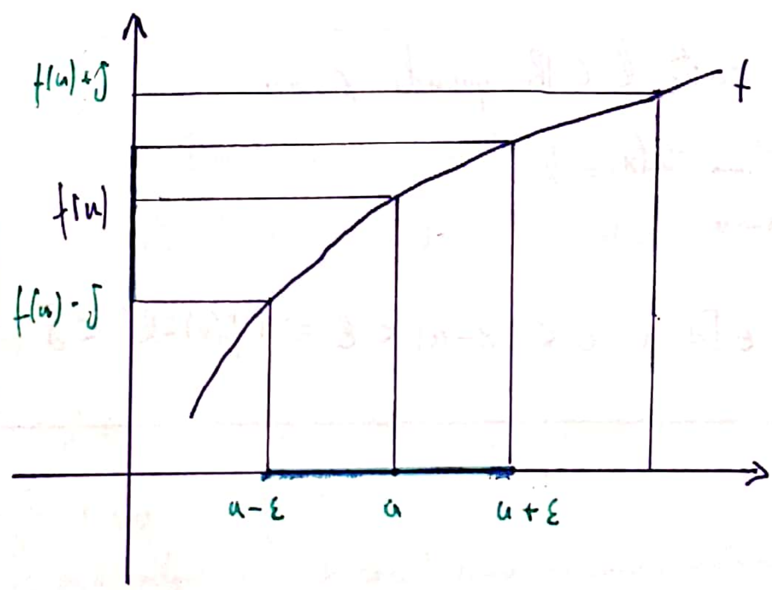
Continuidade e diferenciabilidade de funções reais

Seja $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D_f$

f é contínua à Cauchy em a

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{x\in D_f}{\forall}\ x \in V_\varepsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(f(a))$$

$|x-a| < \varepsilon \quad |f(x) - f(a)| < \delta$



Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$, $a \in D_f$

f é contínua à Heine em a

Qualquer que seja $x_n \in D_f$ tal que $x_n \to a$ então $f(x_n) \to f(a)$

$$\lim_{x \to \lim x_n} f(x) = \lim f(x_n) = f(\lim x_n)$$

→ Sejam $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $a \in D$
Então em $a \in D$ são contínuas as funções:

- $\underline{f \pm g}$
- $\underline{f \cdot g}$
- $\underline{f/g}$ se $g(a) \neq 0$

→ Sejam $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$, $a \in D_g$, $g(a) \in D_f$
Se g é contínua em $a \in D_g$ e f é contínua em $g(a) \in D_f$ então a função $\underline{f \circ g}$ é contínua em $a \in D_g$

→ A função racional $r(x) = \dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ P_m, P_n polinómios sem fatores comuns é contínua em qualquer ponto do domínio

---

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$, $a \in D_f'$

f tem limite $l \in \mathbb{R}$ quando $x \to a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

$$\forall_{\delta > 0} \; \exists_{\varepsilon > 0} \; x \in D_f \land 0 < |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \delta$$

Digitalizada com CamScanner

Ex

Seja $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x$. Mostre que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$\underset{\delta>0}{\forall} \ \underset{\varepsilon=\delta}{\exists} \quad 0<|x|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-0| = |x| < \delta = \varepsilon$$

Teorema

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$. A função f tem limite $\underline{l} \in \mathbb{R}$ em $\underline{a \in D'_f}$ sse qualquer que seja $x_n \in D_f$ tal que $x_n \neq a$ e $x_n \to a$ então $f(x_n) \to l$

ex:

Analise a não existência de limite quando $x \to 0$ da função

$$g: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \ g(x) = \sin(1/x)$$

Considere-se

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0 \qquad x'_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \to 0$$

Tem-se

$$\lim g(x_n) = \lim \sin(n\pi) = 0$$

$$\lim g(x'_n) = \lim \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

Não existe limite quando $x \to 0$

—//—

ex: $w_n = \frac{2}{3n+1} - 4$. Provar pela definição de limite que $\lim w_n = -4$

Pela definição de limite de uma sucessão, $\lim w_n = -4$ se

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} : n>p \Rightarrow |u_n+4| < \delta$$

$$|u_n+4|<\delta \Leftrightarrow \left|\frac{2}{3n+1}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{3n+1} < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{\delta} < 3n+1 \Leftrightarrow 3n > \frac{2}{\delta} - 1$$

$$\Leftrightarrow 3n > \frac{2}{\delta} - 1 \Leftrightarrow n > \frac{2}{3\delta} - \frac{1}{3}$$

Concluímos que, para qualquer $\delta>0$, se considerarmos um número natural $p > \frac{2}{3\delta} - \frac{1}{3}$, se tem $|u_n+4|<\delta$, desde que $n \geq p$. ⊕ Assim, $\lim w_n = -4$

Teorema

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$ e $a \in D_f \cap D_f'$

A função f é contínua em a sse

- existe $\lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ sse

- existem $f(a^+)$ e $f(a^-)$
- $f(a^+) = f(a^-)$

Teorema

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$ e $a \in D_f'$

É condição necessária e suficiente para que exista

$\lim_{x \to a} f(x)$

que exista uma função $F: D_f \cup \{a\} \to \mathbb{R}$:

- $F(x) = f(x) \quad x \in D_f$
- F é contínua em a

Relações entre continuidade e limite num ponto.

→ Se A é um conjunto limitado e fechado

$\sup A$, $\inf A \in A$

Se qualquer que seja $x_n \in A$, a sucessão é convergente tem-se $\lim x_n = a \in A$

Digitalizada com CamScanner

$f: A \to \mathbb{R}$

- A conjunto limitado e fechado
- f contínua em A

teorema da limitação

teorema de Bolzano

teorema de Weierstrass

Teorema da limitação

Sejam
- $I = [a,b]$ conjunto limitado e fechado
- $f: I \to \mathbb{R}$ função contínua em I

então

f é uma função limitada em I

Teorema de Bolzano

Sejam
- $I = [a,b]$ conjunto limitado e fechado
- $f: I \to \mathbb{R}$ função contínua em I
- $f(a) \neq f(b)$

então

qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$ estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in]a,b[$ tal que

$f(c) = k$

corolários 1

Teorema de Weierstrass

Sejam
- $I = [a,b]$ intervalo limitado e fechado
- $f: I \to \mathbb{R}$ função contínua em I

então

f tem máximo e mínimo em I

①

Corolário: Se $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e não se anula em $[a,b]=I$ então os valores de $f(x)$ qualquer que seja $x \in I$ têm o mesmo sinal

Corolário: Se $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\underline{f(a)\cdot f(b)<0}$ a equação $f(x)=0$ tem pelo menos uma solução em $]a,b[$

Teorema

Sejam
- I intervalo limitado e fechado
- $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ função contínua em I

então:

$f(I)$ é um intervalo limitado e fechado

$f(I)$ conjunto limitado $\Rightarrow$ existe $\sup f(I)$ e $\inf f(I)$

Teorema

Seja
- f transforma o intervalo I no intervalo $f(I)$
- f <u>monótona</u>

f é contínua em I

Função arc sin

$f: [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$

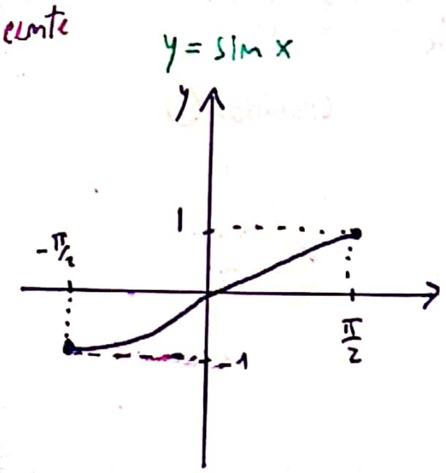
$f = \sin\big|_{[-\pi/2,\, \pi/2]}$

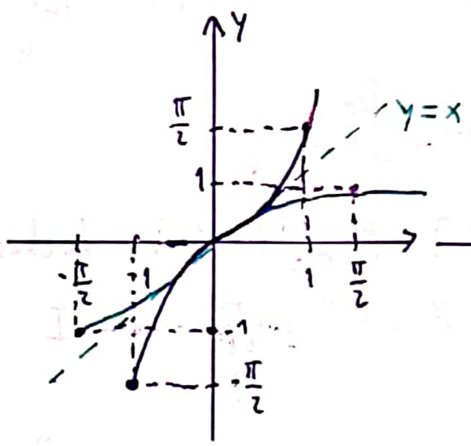
f função contínua e estritamente crescente

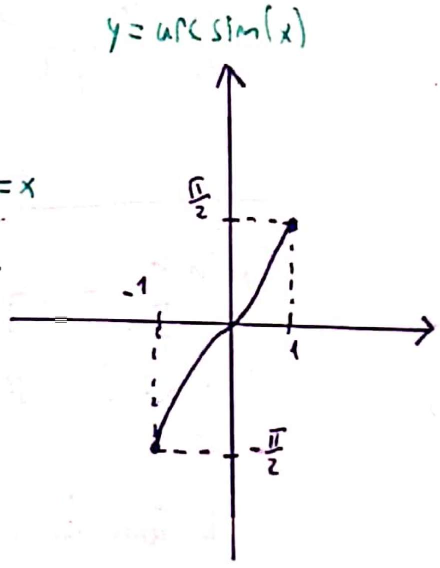
$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a $f(x) = \sin x = y$

$\Leftrightarrow x = \arcsin y = g(y)$

g função contínua e estritamente crescente.





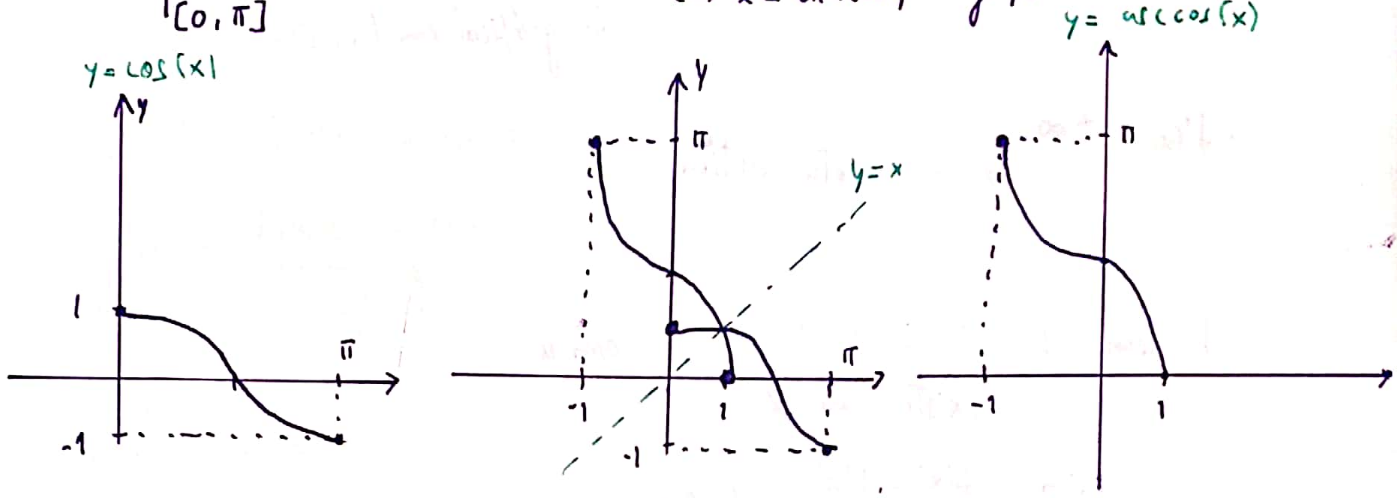


Função arcos

$f = \cos\big|_{[0,\pi]}$

$x \in [0,\pi] \wedge f(x) = \cos x = y$

$\Leftrightarrow x = \arccos y = g(y)$

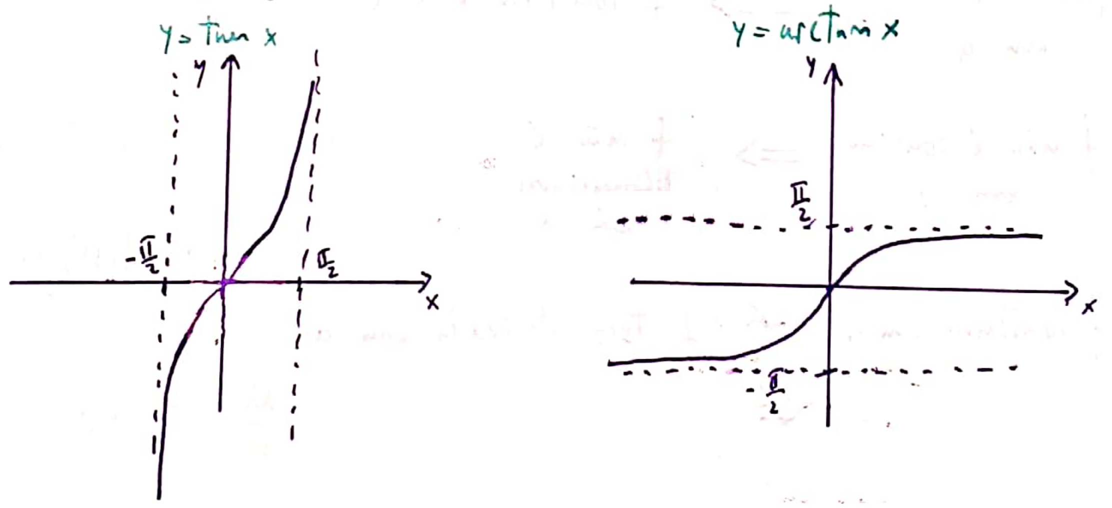


Função arctan

$f = \tan\big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$

$x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\wedge f(x) = \tan x = y$

$\Leftrightarrow x = \arctan y = g(y)$

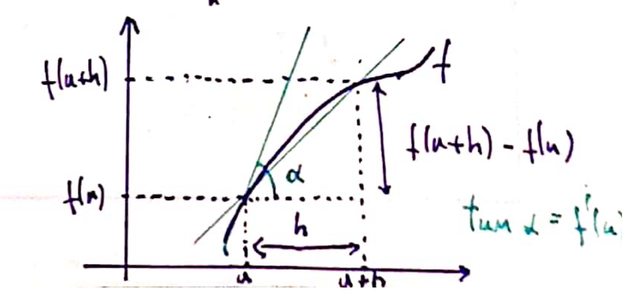


Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \text{int } D$

f tem derivada em a
existe em $\overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$



- $f'(a) = \pm\infty$
- $f'(a) \in \mathbb{R}$ f diferenciável

- $f'(a) \in \mathbb{R}$

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$ equação da reta tangente ao gráfico em $(a, f(a))$

- $f'(a) = \pm\infty$ $\quad x = a$ reta vertical

f tem derivada à direita / esquerda em a existe em $\overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{\substack{x \to a^+ \\ a^-}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{matrix} f'_d(a) \\ f'_e(a) \end{matrix}$$

f é diferenciável em a $\Longrightarrow$ f contínua em a

f não é contínua em a $\Longrightarrow$ f não é diferenciável em a

f contínua em a $\not\Longrightarrow$ f tem derivada em a

$\not\Leftarrow$

Teorema (Derivada da função composta)

Sejam I, J intervalos abertos

- $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$
- f diferenciável em $a \in I$, g diferenciável em $f(a)$

então

- $g \circ f$ é diferenciável em a
- $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Regras de Derivação

$$(f \pm g)'(u) = f'(u) \pm g'(u)$$

$$(fg)'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(u) = \frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{[g(u)]^2} \qquad g(u) \neq 0$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \cdot (x)'$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \times \ln a \times a^u$$

$$[\log_a(u)]' = \frac{u'}{\ln a \cdot u}$$

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

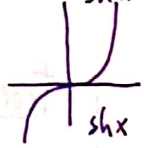
$$\coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \qquad \operatorname{csch} = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

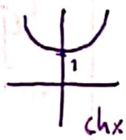
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ímpar



$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

par



Teorema

Sejam
- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto
- $f: I \to \mathbb{R}$
  - estritamente monótona e contínua
  - diferenciável em $c \in I$ com $f'(c) \neq 0$

então
a função inversa de f, g, é diferenciável em $d = f(c)$ sendo

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}$$

Derivada da função inversa

Teorema

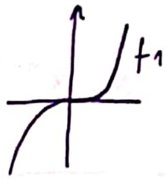
Sejam

- I intervalo de $\mathbb{R}$, $c \in \text{int}\, I$
- $f: I \to \mathbb{R}$ tem extremo relativo em c e é diferenciável em c

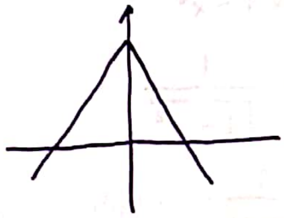
então

$$f'(c) = 0$$

$f'(c) = 0 \not\Rightarrow f$ tem extremo relativo em c ex:



ex:



Em $x=0$ tem um extremo relativo mas f_2 não é diferenciável em $x=0$

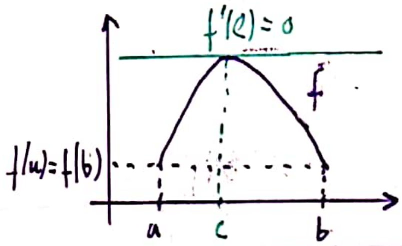
f tem extremo em c $\Rightarrow$ f tem extremo relativo em c

Ser máximo relativo não implica ser absoluto

Teorema de Rolle

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$ tal que $f(a) = f(b)$ então

$$\exists_{c \in]a,b[} \quad f'(c) = 0$$



Corolário

Entre dois zeros de uma função diferenciável em $]a,b[$ há pelo menos um zero da sua derivada

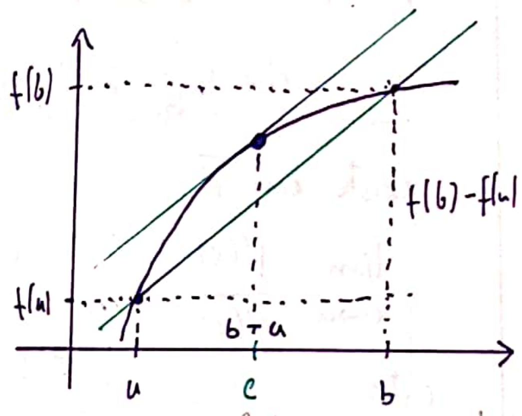
Corolário

Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável em $]a,b[$ não pode haver mais de um zero dessa função

Teorema de Lagrange

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$ então

$$\underset{c \in]a,b[}{\exists} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



Teorema de Rolle é caso particular disto. $f(a)=f(b)$

Corolário

Se $f'(x)=0$, $x \in]a,b[= I$ então f é constante em I

Corolário

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$

Se $f'(x)>0$, $x \in]a,b[$ então f é estritamente crescente em $[a,b]$

$(f'(x)<0)$ (decrescente)

Teorema de Cauchy

Sejam $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que:

- f, g funções contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em $]a,b[$
- $g'(x) \neq 0$, $x \in]a,b[$

então

$$\underset{c \in]a,b[}{\exists} \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teorema de Lagrange é caso particular disto $g(x)=x$

Teorema

Seja $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tal que

- existem $f', f'', \dots f^{(n)}$ em I
- $f^{(n)}$ contínua em $x_0 \in I$
- $f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ até $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

então

(i) Se n par

$f^{(n)}(x_0) > 0$ f é convexa em x_0

$f^{(n)}(x_0) < 0$ f é concava em x_0

(ii) Se n impar

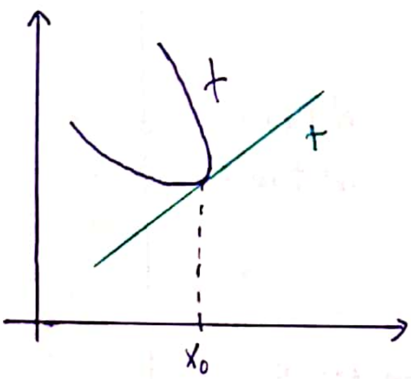
x_0 é ponto de inflexão

Aplicação à analise da posição do gráfico e da tangente

Seja

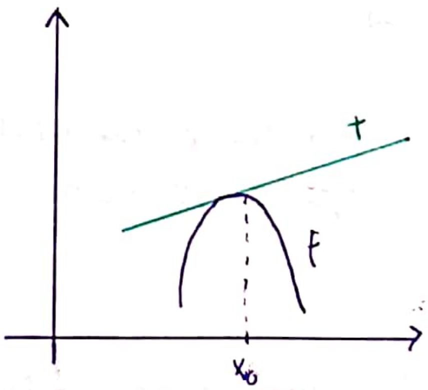
- $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $x_0 \in \text{int}\, D$
- $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

equação da reta tangente no gráfico em x_0



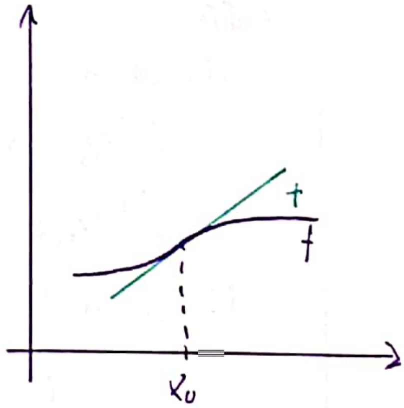
função convexa em x_0

$f(x) - t(x) \geq 0$



função concava em x_0

$f(x) - t(x) \leq 0$



ponto de inflexão em x_0

Limites notáveis

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

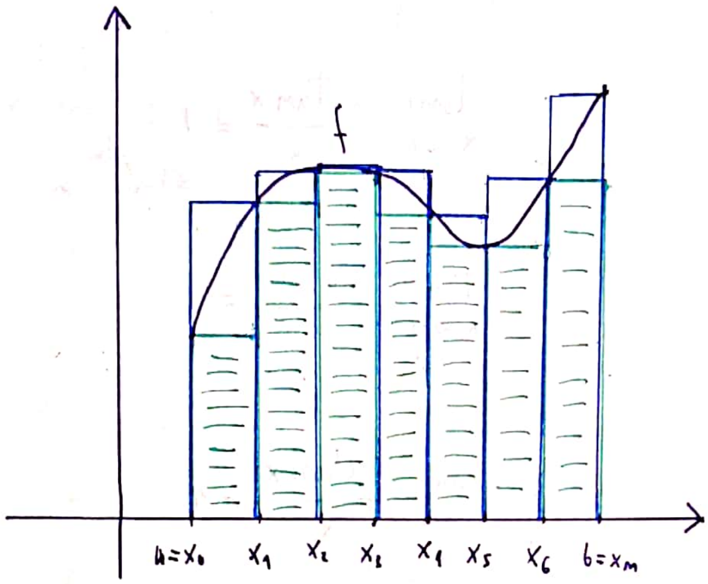
$p \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Cálculo Integral



$A = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

Como determinar a área?

S_m aproximação por excesso

s_m aproximação por defeito

$S_m - s_m \to 0$

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ função limitada e

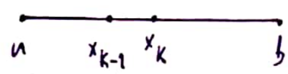
$$m_k = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$M_k = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$s_d = \sum_{k=1}^{m} m_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{Soma inferior de Darboux}$$

$$S_d = \sum_{k=1}^{m} M_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{Soma superior de Darboux}$$

Decomposição de $I = [a,b]$



Ex:

$d = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$s_d = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + m_4(x_4 - x_3) + m_5(x_5 - x_4) + m_6(b - x_5)$

Seja d' uma decomposição de $[a,b]$ mais fina que d

$$s_d \leq s_{d'} \leq S_{d'} \leq S_d$$

Seja

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ função limitada, $I = [a,b]$
- $D(I)$ conjunto de todas as decomposições de I

$\{s_d\}_{d \in D(I)}$ conjunto de todas as somas inferiores de Darboux

$m(b-a)$ elemento mínimo

$m = \inf_{[a,b]} f$

$\{S_d\}_{d \in D(I)}$ conjunto de todas as somas superiores de Darboux

$M(b-a)$ elemento máximo

$M = \sup_{[a,b]} f$

$$m(b-a) \leq s_{d'} \leq S_d \leq M(b-a)$$

conjuntos limitados, existem ínfimo e supremo

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ função limitada

$$S = \inf \{S_d\}_{d \in D(I)} = \overline{\int_a^b} f$$

integral superior de Darboux

$$s = \sup \{s_d\}_{d \in D(I)} = \underline{\int_a^b} f$$

integral inferior de Darboux

Se $S = s$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ função integrável

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

integral definido de f

Ex: Seja $D : I \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, $I = [a,b]$

D é função integrável?

- $s_d = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = 0$ $\quad m_k = 0$

$$\sup \{0\}_{d \in D(I)} = \underline{\int_a^b} D = 0$$

- $S_d = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = b - a$

$$\inf \{b-a\}_{d \in D(I)} = \overline{\int_a^b} D = b - a$$

$$\underline{\int_a^b} D = 0 \neq \overline{\int_a^b} D = b - a$$

D é uma função não integrável

Teorema **Critério de integrabilidade de Riemann**

É condição necessária e suficiente para f $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ função limitada seja integrável em $[a,b] = I$ a condição

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{d \in D(I)} \quad S_d - s_d < \varepsilon$$

Corolário:

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ função limitada

Se existir uma sucessão de decomposições d_n de $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n} \left(S_{d_n} - s_{d_n} \right) = 0$$

então

- f é uma função integrável
- $\int_a^b f\,dx = \lim_n S_{d_n} = \lim_n s_{d_n}$

Teorema

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ função monotona e limitada
Então f é uma função integral em $[a,b]$.

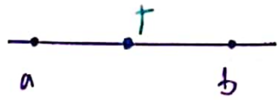
Teorema

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$
Então f é uma função integrável em $[a,b]$

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

integral definido

f - função integranda
$[a,b]$ - intervalo de integração
a, b - extremos de integração
t - variável de integração



$b = a$

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0$$

$b < a$

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$$

Teorema

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis em $I = [a,b]$ e K uma constante real. Então

(i) $f+g$ é integrável

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$

(ii) Kf é integrável

$$\int_I Kf = K \int_I f$$

$$\int f \cdot g \neq \int f \cdot \int g$$

Teorema

(i) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, f função integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$. Então f é função integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

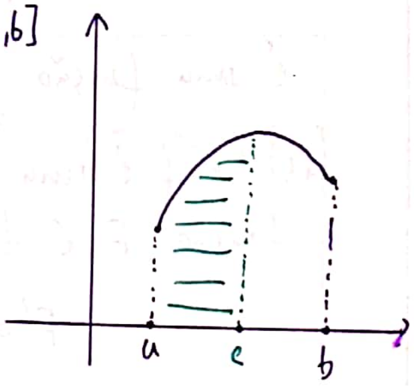
(ii) Se f é uma função integrável em I é também uma função integravel em qualquer intervalo $J \subset I$ e para qualquer $c \in]a,b[$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ função integravel, $c_1, c_2, \dots, c_m \in [a,b]$

numero contável

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_m}^b f$$



Sejam f, g funções integráveis em $[a,b] = I$

(i) Se $f(x) > 0$, $x \in I$

$$\int_a^b f > 0$$

(ii) Se $f(x) > g(x)$, $x \in I$

$$\int_a^b f > \int_a^b g$$

(iii) Se f é integravel então $|f|$ é integravel

$$\left| \int_a^b f \right| < \int_a^b |f|$$

$|f|$ integrável $\not\Rightarrow$ f integravel

$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt$ Função integral definido

$F(a) = 0 \qquad F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

<u>Teorema fundamental do cálculo integral</u>

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integral em $[a,b]$ então

(i) A função integral indefinido de f

$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é uma função contínua em $[a,b]$

(ii) Se f é uma função contínua em $c \in]a,b[$ a função F é diferenciável em c e

$$F'(c) = f(c)$$

$\int_a^b f(t)\,dt = ?$

- Formula de Barrow
- Metodo de integração por partes
- Metodo de integração por substituição

Teorema

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função integrável e primitivável em I, F uma sua primitiva
então

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

Fórmula de Barrow

ex:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt \qquad f(t) = \frac{1}{1+t}$$

$$F(t) = \ln(1+t) \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = F(1) - F(0) = \ln 2$$

Teorema

Sejam $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis com derivadas integráveis em $[a,b]$

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt = \left[f \cdot g\right]_a^b - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$$

Método de integração por partes

$$h = (f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

$$\int_a^b h = \int_a^b (f \cdot g)' = \left[f \cdot g\right]_a^b = \int_a^b f \cdot g' + \int_a^b f' \cdot g$$

Ex

$$\int_1^2 x \ln x \, dx \qquad f(x) = x \ln x$$

$f'(x) = x \qquad f(x) = x^2/2$

$g(x) = \ln x \qquad g'(x) = 1/x$

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= (2\ln 2 - 0) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

teorema

Seja

- f contínua em $[a,b]$
- $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ função diferenciável com derivada integrável em $[\alpha, \beta]$
- $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$
- $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ é uma função integrável em $[\alpha, \beta]$
- $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

Método de integração por substituição

φ bijetiva $\qquad u = \varphi(t)$

$$\int_a^x f(u)\,du = \int_\alpha^\xi f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = g(\xi) = g(\varphi^{-1}(x))$$

$$x = \varphi(\xi) \Rightarrow \xi = \varphi^{-1}(x)$$

F primitiva de f em $[a,b]$

$t \in [\alpha, \beta]$

$$h(t) = [F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) . \varphi'(t) = f(\varphi(t)) . \varphi'(t)$$

$F \circ \varphi$ primitiva de h em $[\alpha, \beta]$

$$\int_\alpha^\beta h(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) . \varphi'(t)$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

Ex

Determine $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

Sugestão: $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$

$x = \sin t \quad \varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1] \ . \quad \varphi(t) = \sin t \quad \varphi(t_1) = 0 \to t_1 = 0$

$\varphi'(t) = \cos t \quad \varphi(t_2) = 1 \to t_2 = \pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \cos t . \cos t\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Ex Determine uma primitiva da função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{u}} du$$

$u = t^2 \quad \varphi : [0, \sqrt{x}] \to [0, x] \ , \quad \varphi(t) = t^2 \quad \varphi(t_1) = 0 \to t_1 = 0$

$\varphi'(t) = 2t \quad \varphi(t_2) = x \to t_2 = \sqrt{x}$

φ bijetiva

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t} . 2t\, dt = 2 \int_0^{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= \left[2(t - \ln(1+t)) \right]_0^{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}))$$

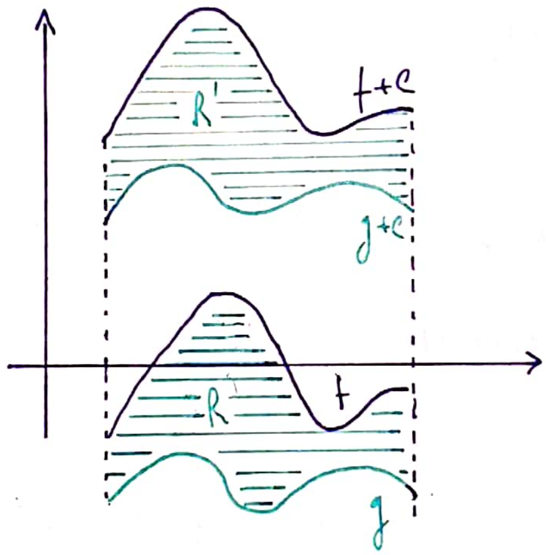
Aplicação: Determinação de areas planas

Sejam as funções limitadas $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis tais que $g(x) < f(x)$, $x \in [a,b]$

Então tem-se para a área da região R

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

$$\text{Area}(R) = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

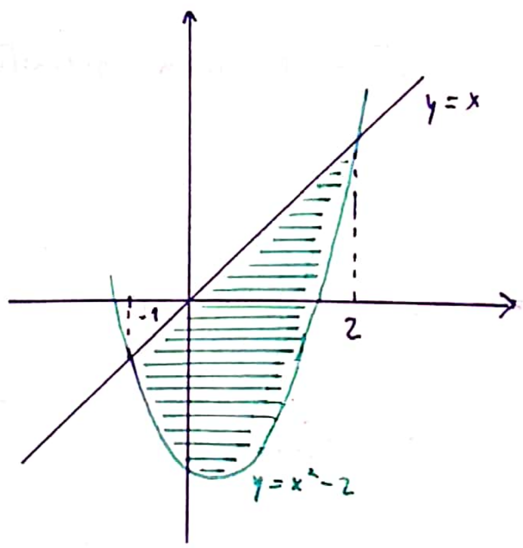


Ex Determine a área delimitada por $y = x^2 - 2$ e $y = x$

Pontos de interseção

$x^2 - 2 = x$

$x^2 - x - 2 = 0 \quad x = 2 \quad x = -1$



$$A = \int_{-1}^{2} (x - (x^2 - 2))\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

Função racional

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$ p, q polinomios de coeficientes reais.

- grau $p <$ grau q — R fração própria
- grau $p \geq$ grau q — R fração imprópria

$$p(x) = q(x)\,C(x) + r(x)$$

C, r polinomios

grau $r <$ grau q

$$\begin{array}{r|l} D & q \\ \hline R & q \end{array}$$

$$\frac{D}{q} = q + \frac{R}{d}$$

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$ fração própria

Integração de funsões racionais

representadas por frações próprias

$$\int_a^b R(x)\,d(x), \quad R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

(i) Decomposição em frações simples

(ii) Integração das frações simples e aplicação da propriedade da linearidade

R representada por fração imprópria

$$\int_a^b R(x)\,dx = \int_a^b C(x)\,dx + \int_a^b \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$$

C polinomio — integração imediata

fração própria

(i-1) Fatorização de q em fatores irredutíveis

Um polinomio q de grau $n > 1$ é redutível se existirem q_1, q_2 polinomios ambos de grau menor que n tais que

$$q = q_1 q_2$$

Polinómio irredutível

Polinomios irredutíveis de coeficientes reais

- grau ímpar

polinomio de grau um

$$q(x) = ax + b, \quad a \neq 0 \qquad \text{polinomio irredutível}$$

polinomio de grau maior que um — polinomio redutível

- grau par

polinomio de grau dois

$$q(x) = x^2 + bx + c$$

Se $b^2 - 4c > 0$ $\quad q(x) = (x-\alpha).(x-\beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — polinomio redutível

Se $b^2 - 4c = 0$ $\quad q(x) = (x-r)^2,\ r \in \mathbb{R}$ — polinomio redutível

Se $b^2 - 4c < 0$ $\quad q(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c - b^2}{4} = (x-p)^2 + q^2,\ p, q \in \mathbb{R}$

polinómio irredutível

polinomio de grau maior que dois — polinómio redutível

$$q(x) = c\,\overbrace{(x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_m)^{n_m}}^{\text{irredutíveis de 1º grau}} \cdot \overbrace{\left[(x-p_1)^2+q_1^2\right]^{s_1}\cdots\left[(x-p_m)^2+q_m^2\right]^{s_m}}^{\text{irredutíveis de 2º grau}}$$

$n_i,\ i = 1 \dots m$ — multiplicidades

$s_j,\ j = 1 \dots m$

(i - 2) Decomposição de $P(x)/q(x)$

Dois polinomios q_1 e q_2 são primos entre si se não existirem polinómios $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$ e $\tilde{q}$ tais que

$$q_1 = \tilde{q}\,\tilde{q}_1 \qquad q_2 = \tilde{q}\,\tilde{q}_2$$

Sejam q_1 e q_2 polinómios primos entre si e p um polinomio tal que $\text{grau } p \leq \text{grau}(q_1 q_2)$

então existem polinómios p_1 e p_2 tais que

$$\text{grau } P_i < \text{grau } q_i \qquad i = 1, 2$$

e

$$\frac{p(x)}{q_1(x)\,q_2(x)} = \frac{P_1(x)}{q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{q_2(x)}$$

Generalização: $p(x) / \prod_{i=1}^{m} q_i(x) \to q_1(x).q_2(x).q_3(x)\ldots q_m(x)$

Sejam $a \in \mathbb{R}$, p, q, polinómios tais que

$$\text{grau } p < m + \text{grau } q_1, \quad q_1(a) \neq 0$$

então

$$\frac{P(x)}{q_1(x)(x-a)^m} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)} + \frac{P_1(x)}{q_1(x)}$$

em que

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{p}{q_1}\right)^{(k-1)}(a) \qquad k = 1, 2, \ldots m$$

→ Derivada

Ex: Determine $\int_2^3 \frac{4x^2+x+1}{x^3-x}\,dx$

$g(x) = x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ raízes reais simples

Decomposição em frações simples

$$f(x) = \frac{4x^2+x+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$4x^2+x+1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$
$$= (A+B+C)x^2 + (B-C)x - A$$

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ B-C=1 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=3 \\ C=2 \end{cases}$$

método dos coeficientes indeterminados

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

$$\int_2^3 f(x)\,dt = \Big[-\ln|x| + 3\ln|x-1| + 2\ln|x+1|\Big]_2^3 = -3\ln 3 + 8\ln 2$$

Ex Determine $\int_1^2 \frac{4x+1}{x(x+1)^3}\,dx$

$g(x) = x(x+1)^3$ raízes reais simples e múltiplas

Decomposição em frações simples

$$f(x) = \frac{4x+1}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{A_3}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{(x+1)^3}$$

$$A_K = \frac{1}{(K-1)!}\left(4+\frac{1}{x}\right)^{(K-1)}(-1) \qquad K=1,2,3$$

$A_1 = 3$ $\quad A_2 = \left(-\frac{1}{x^2}\right)_{x=-1} = -1$ $\quad A_3 = \left(-\frac{1}{x^2}\right)'_{x=-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{x^3}\right)_{x=-1} \cdot \frac{1}{2} = -1$

$A = 1$ método dos coeficientes indeterminados

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right]_1^2$$

$$= \ln\left(4/3\right) + 9/24$$

Resumo:

Integração de funções racionais representadas por funções próprias

$$\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = ?$$

(i) Decomposição em frações simples

(i-1) Fatorização de q em polinómios irredutíveis

$ax+b$ — $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$

$(x-p)^2+q^2$ — $p, q \in \mathbb{R}, q \neq 0$

(i-2) Decomposição p/q

(ii) Integração das frações simples e aplicação da propriedade da linearidade

$$\int_a^b \frac{A}{(x-a)^m}$$

$m \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \frac{Bx+C}{\left[(x-p)^2+q^2\right]^m}$$

$m \in \mathbb{N}, B, C \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}$

explicado nas próximas páginas

teorema Decomposição em fração simples

Sejam p, q polinomios de coeficientes reais tais que grau $p <$ grau q. A função racional $p(x)/q(x)$ é a soma de um numero finito.

$$\frac{A}{(x-a)^n} \qquad \frac{Bx+C}{[(x-p)^2+q^2]^m}$$

$a, p, q \in \mathbb{R}$ $\quad n, m \in \mathbb{N}$ $\quad A, B, C \in \mathbb{R}$

Ex:

Determine $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+2}{x^3-1}\,dx$

$$q(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$$

polinomio irredutível do 2° grau com multiplicidade um

Decomposição em frações simples

$$f(x) = \frac{x+2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$x+2 = (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=1 \\ A-C=2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &A=1 \\ &B=C=-1 \end{aligned}$$

metodo dos coeficientes indeterminados

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{dx}{x-1} - \int_2^3 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \Big[\ln|x-1|\Big]_2^3 + I = \ln 2 + I$$

$$I = \int_2^3 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = ?$$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{x+1}{(x-p)^2+q^2} \qquad p = -1/2 \; , \; q = \sqrt{3}/2$$

$$x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

integração por substituição

$$x = \varphi(t) = p + qt = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$x = 2 \quad t_1 = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

$$x = 3 \quad t_2 = \frac{7}{3}\sqrt{3}$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot (t^2+1)} \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\operatorname{arctan} t\Big]_{5\sqrt{3}/3}^{7\sqrt{3}/3} + \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_{5\sqrt{3}/3}^{7\sqrt{3}/3}$$

polinómio irredutível do 2° grau com multiplicidade um.

Metodo de racionalização

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

função integranda

(i) classes de funções trigonométricas

(ii) classes de funções irracionais

$$\text{função integranda} \xrightarrow[\text{método de substituição}]{} \text{função racional}$$

(i) Classes de funções trigonométricas

$$\int_a^b \underset{\text{racional}}{R}(\sin x, \cos x)\, dx$$

$\sin x = \dfrac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}$

$\cos x = \dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

$\tan \frac{x}{2} = t \qquad x = \varphi(t) = 2\arctan t$

$\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Ex: Determine $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\, dx$

$\varphi(t) = x = 2\arctan(t) \qquad \varphi : [t_1, t_2] \longrightarrow [0, \pi/2]$

$x_1 = 0 \to t_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{\pi}{2} \to t_2 = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{2t+1-t^2+1+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{2}{2(t+1)}\, dt$$

$$= \left[\ln|t+1|\right]_0^1 = \ln 2$$

(ii) Classes de funções irracionais

- $$\int_a^b R\left(x, \left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{1/2}\right) dx$$

$$\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{1/2} = t$$

- $$\int_a^b R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$$

$$a>0,\ b^2-4ac<0$$

$b^2-4ac>0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,(x-\alpha)^{1/2}(x-\beta)^{1/2}$$

$$= \sqrt{a}\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^{1/2}(x-\beta)$$

situação anterior

Ex Determine $\displaystyle\int_{5/4}^{7/4} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\,dx$

$$I = \int_{5/4}^{7/4} \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\,dx = \int_{5/4}^{7/4} \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2-x}\right)^{1/2}(2-x)}\,dx$$

$$\left(\frac{x-1}{2-x}\right)^{1/2} = t \qquad \frac{x-1}{2-x} = t^2 \qquad x = \varphi(t) = \frac{2t^2+1}{1+t^2}$$

$$\varphi'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

$$x_1 = 5/4 \rightarrow t_1 = \sqrt{3}/3$$

$$x_2 = 7/4 \rightarrow t_2 = \sqrt{3}$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2-\frac{2t^2+1}{1+t^2}}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\left[\operatorname{arctan} t\right]_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}}$$

$$I = 2.\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Ex Determine $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2+k^2}}\,dx$, $k=$ const

$\sqrt{x^2+k^2} = x+t$

$$x^2+k^2 = x^2+2xt+t^2$$

$$x = \varphi(t) = \frac{k^2-t^2}{2t}$$

$$\varphi'(t) = -\frac{t^2+k^2}{2t^2}$$

$$I = \int_1^2 \frac{1}{(x^2+k^2)\sqrt{x^2+k^2}}\,dx = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\left(\frac{k^2-t^2}{2t}+t\right)^3}\cdot\frac{t^2+k^2}{2t^2}\,dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\frac{(t^2+k^2)^3}{2^3t^3}}\cdot\frac{t^2+k^2}{2t^2} = -4\int_{t_1}^{t_2}\frac{t}{(t^2+k^2)^2}\,dt$$

$$I = \left[\frac{2}{t^2+k^2}\right]_{t_1}^{t_2}$$

Integrais

$$\int (f \cdot g) = f \int g - \int f' \cdot \int g$$

- $\int 1\, dx = 1 \int dx = \int dx = x + c$
- $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
- $\int a\, dx = a \int dx = ax + c$
- $\int \csc^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + c$
- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$
- $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{x \cdot \ln a}\, dx = \log_a x + c$
- $\int \overset{\frac{1}{\sin x}}{\csc x} \cdot \overset{\frac{1}{\tan x}}{\operatorname{ctg} x}\, dx = -\csc x + c$
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c$
- $\int \overset{\frac{1}{\cos x}}{\sec x} \cdot \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + c$
- $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c$
- $\int e^x\, dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x + c$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$
- $\int u'(x) \sin(u(x)) = -\cos u(x)$
- $\int u'(x)\, u(x)^\alpha = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Calcular um Integral

- o integral é imediato
  - Sim
    - Formulário
  - Não
    - é racional
      - Sim
        - Função racional $\frac{N}{D}$
          - Fração própria: grau numerador < grau denominador
            - Calcular as raízes do numerador e do denominador
            - Decompor a fração pelo mét. coeficientes indeterminados
          - Fração imprópria: grau numerador > grau denominador
            - Divisão de polinómios
              $$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$$
              R → resto
      - Não
        - pode ser integrado por partes?
          - Sim
            $$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dt = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx$$
          - Não
            - Resolver por Substituição
              $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$
              $$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$$

LIPTE

Series

$$\begin{aligned}
a_1 &\longrightarrow s_1 \\
a_1 + a_2 &\longrightarrow s_2 \\
a_1 + a_2 + a_3 &\longrightarrow s_3 \\
&\vdots \\
a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_i + \dots + a_m &\longrightarrow s_m \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Se s_m sucessão convergente

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim s_m$$

Designa-se por **serie númerica** o objeto matemático definido por o par de sucessões de termos reais

$$(a_m, s_m) \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} a_m$$

em que $s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$

a_m sucessão de termos da serie

s_m sucessão das somas parciais da serie

$$a_m \longrightarrow s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

$$s_m \longrightarrow a_m = s_m - s_{m-1}$$

$\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ serie convergente/divergente

a sucessão s_m é sucessão convergente/divergente

Soma da serie convergente $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$

$$s = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m = \lim s_m \qquad s \in \mathbb{R}$$

- Natureza da serie: Serie convergente ou serie divergente

- Determinação da soma da serie, se convergente

Teorema

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ é uma serie convergente então a_n é uma sucessão com limite zero

$a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, serie divergente

Série geométrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

$$a_n = ar^{n-1} \qquad S_n = a + ar + \dots ar^{n-1}$$

- $r = 1$

$$S_n = a + a + \dots + a \qquad S_n = na \qquad \text{sucessão divergente}$$

- $r \neq 1$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$r S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$ sucessão convergente se $|r| < 1$

$$\lim r^n = \begin{cases} +\infty & , r > 1 \\ 0 & , |r| < 1 \\ \text{não existe} & r \leq -1 \end{cases}$$

Se $r \leq -1$ ou $r \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a r^{n-1} \quad \text{serie divergente}$$

Se $|r| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a r^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad \text{serie convergente}$$

Serie de Mongoli

A serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ em que $a_n = u_n - u_{n+1}$ e a sucessão u_n são convergentes ou divergentes simultameamente. No caso de convergência:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = u_1 - \lim u_{n+1}$$

ex: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é uma serie convergente?

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$$

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

S_n sucessão convergente?

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{sucessão convergente}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a''_n$ series convergentes de somas respetivamente s' e s''

Então:

(i) a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ em que $a_n = a'_n + a''_n$ é convergente de soma $s = s' + s''$

(ii) a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ em que $b_n = k a'_n$, $k \in \mathbb{R}$, é convergente de soma $t = k s'$

• Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a''_n$ series divergentes então $\sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n + a''_n)$ pode ser divergente ou convergente.

• Se uma das series $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a''_n$ convergente e a outra divergente então é divergente $\sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n + a''_n)$

Teorema Critério de Cauchy

A serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma serie convergente sse

$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{p} \quad n \geq q > p \quad |a_{q+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon$$

Mt Teorico
(A parte importante são os corolários).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_p + \ldots + \underline{a_q + a_{q+1} + \ldots + a_n} + \ldots$$

Corolário

As series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ em que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n > p$:

$$a_n = b_n$$

são da mesma natureza

Ex:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = S$$

série convergente

$n > p = 2$

$$5, 7 + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = S'$$ série convergente

$S' \neq S$

Corolário

A natureza de uma serie não é alterada se lhe suprimirmos um número finito de termos

Ex:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ em que $b_n = a_{n+p}$, $p \in \mathbb{N}$ têm a mesma natureza.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$ serie divergente

$p = 3 \quad b_1 = a_{1+3} = a_4 \quad b_2 = a_{2+3} = a_5$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+3} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+3}$$ serie divergente

Critérios de convergência para series de termos não negativos

Teorema

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, é uma serie convergente sse a sucessão das somas parciais $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ é majorada

Teorema - Critério geral de comparação

Seja

$0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$

então

(i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ serie convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ série convergente

(ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ serie divergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ série divergente

Ex: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma serie convergente?

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ tem a mesma natureza que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$0 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\downarrow$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ série de Mengoli convergente

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ série convergente

Series de Derichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$\alpha > 1$ serie convergente

$\alpha \leq 1$ serie divergente

Critérios de convergência $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,\ a_n \geq 0$

- Critérios de comparação
- Critérios da razão
- Critérios da raiz

teorema Critério de comparação na forma de limite

Sejam $a_n \geq 0,\ b_n < 0$

(i) Se existir em $\mathbb{R}$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$$

então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ têm a mesma natureza

(ii) Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{matrix} 0 \\ +\infty \end{matrix}$

e se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma serie convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma serie convergente

série divergente ... série divergente

Ex: Qual a natureza da serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n}{1+\pi^{2n}}$?

Sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\right)^n}_{a_n}$ serie geometrica convergente

$1/\pi < 1$

$$\lim \frac{\pi^n}{1+\pi^{2n}} \Big/ \left(\frac{1}{\pi}\right)^n = \lim \frac{\pi^{2n}}{1+\pi^{2n}} = 1 \neq 0$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ <u>serie convergente</u>

teorema - Critério da razão

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n > 0$

(i) Se existir $r<1$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

então é uma serie convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

(ii) Se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

então é uma série divergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Critério de D'Alembert

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n > 0$ tal que exista

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- Se $l < 1$ a série é convergente
- Se $l > 1$ a série é divergente

Se $l = 1^+$ serie divergente

Ex: Analise a natureza da serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a>1$

$a_n = \frac{a^n}{n!}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$ $\quad \lim \frac{a}{n+1} = 0 < 1$

serie convergente

Teorema - Critério da raíz

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n \geq 0$

(i) Se existir $r<1$ tal que $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ então a série é convergente

(ii) Se para infinitos valores de n $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ então a série é divergente

Critério de Cauchy

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ tal que existe $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$

Então

- Se $l<1$ a série é convergente
- Se $l>1$ a série é divergente

Ex: Analise a natureza da serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n a^n$, $a \in \mathbb{R}$

$a_n = n a^n$

$\sqrt[n]{n a^n} = \sqrt[n]{n} \cdot a$

$a<1$ serie convergente

$a \geq 1$ serie divergente

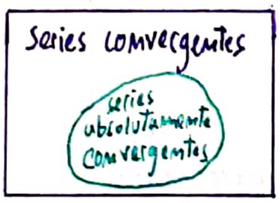
$\lim \sqrt[n]{n} = \lim \frac{n+1}{n} = 1$

$a_n = n \cdot 1^n = n \not\to 0$

teorema

Sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ uma serie convergente então é também $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série convergente e

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$



$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ serie convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ serie convergente

$\not\Leftarrow$

Ex: Analise a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos n\pi$, $0<a<1$

$a_n = a^n \cos \pi \qquad a_n = a^n (-1)^n$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n$$

$0<a<1$ série geométrica convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ série absolutamente convergente

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos n\pi$, $0<a<1$

série convergente

Aproximação da soma da serie

Fixe-se $p \in \mathbb{N}$

$$S_{n+p} = S_p + (a_{p+1} + \dots + a_{p+n})$$

$$\underset{\substack{\text{soma da série} \\ S \in \mathbb{R}}}{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim S_n$$

$S_n = a_1 + \dots + a_n$

passando ao limite em n

$$s = s_p + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+p}$$

$$s \simeq s_p$$

$$r_p = s - s_p = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+p} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n$$

resto de ordem p

Majoração para o erro r_p

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ série absolutamente convergente tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r < 1$$

$$|r_p| = \left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n| = |a_{p+1}| + |a_{p+2}| + \dots$$

$$\leq |a_{p+1}| \left(1 + \left|\frac{a_{p+2}}{a_{p+1}}\right| + \left|\frac{a_{p+3}}{a_{p+1}}\right| + \dots\right)$$

$$\leq |a_{p+1}| (1 + r + r^2 + \dots)$$

c. A

$$\left|\frac{a_{p+3}}{a_{p+1}}\right| = \left|\frac{a_{p+3}}{a_{p+2}} \cdot \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}}\right|$$

$$|r_p| \leq \frac{|a_{p+1}|}{1-r}$$

Ex: Seja a série numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Indique uma aproximação da soma e um majorante para o erro cometido

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1} < 1$$

Considerando $p=5$ seja a aproximação da soma da série

$$e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

tem-se

$$r_p = a_6 \left(1 + \frac{a_7}{a_6} + \frac{a_8}{a_7} \cdot \frac{a_7}{a_6} + \dots\right)$$

em que

$$a_6 = \frac{1}{6!} \qquad \frac{a_7}{a_6} = \frac{1}{7}$$

$$|r_p| \leq \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{1 - 1/7} = \frac{1}{6!} \cdot \frac{7}{6} < 0{,}002$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots + a_m x^m = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n = P_m(x)$$ polinómio de grau m

$x \in \mathbb{R}$

$P_m : D_{P_m} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
função polinomial

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots + a_n x^n + \dots\dots\dots\dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$$

$f : D_f = ? \to \mathbb{R}$

Séries de potências de x

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

a_n sucessão de termos reais

Domínio de convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ série convergente} \right\}$$

Função soma da série

$f : D \to \mathbb{R}$

$$x \in D \to f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Teorema

Seja a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ em que existe $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$

Então designado por raio de circunferência

$$r = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

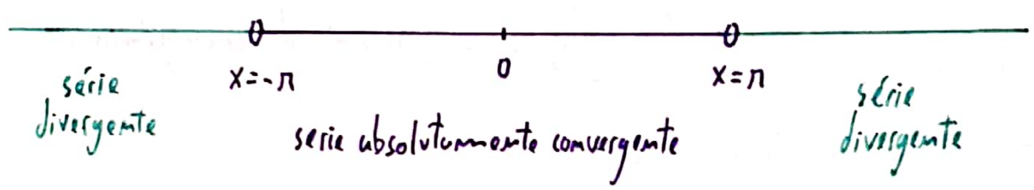
(i) a série é absolutamente convergente para $x \in]-r, r[$

(ii) a série é divergente para $x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$

O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, sempre que exista $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, é dado por

$$r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$



$r=0$ a série é divergente excepto possivelmente em $x=0$

$r=+\infty$ a série é absolutamente convergente em $\mathbb{R}$

Ex: Indique o domínio de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ e a sua soma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + \dots + x^n + \dots$$

$a_n = 1$ $\qquad$ $r = 1/\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

Em $x \in]-1,1[$ a série é absolutamente convergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \begin{aligned} f:]-1,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 1/_{1-x} \end{aligned}$$

Em $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ a série é divergente

$x = \pm 1$ $\qquad$ séries divergentes: $\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$

Série de potências de $x-a$, $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \qquad a_n \text{, sucessão de termos reais}$$

· Domínio de convergência

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \text{ série convergente} \right\} \supset \left] a-r, a+r \right[$$

r raio de convergência

$x - a = u$

· Função soma da série

$f : D \to \mathbb{R}$

$$x \in D \to f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$

Ex: Indique o maior intervalo aberto onde é absolutamente convergente a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x-3)^n$

$x - 3 = u$ $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} u^n \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad r = \lim \left| \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{2n+3}{(-1)^{n+1}} \right| = 1$

se $|u| < 1$ a série é absolutamente convergente

$|x-3| < 1 \qquad -1 < x-3 < 1 \qquad$ o maior intervalo aberto é $]2,4[$

Ex: Determine quando possível a função soma da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n!} \right) (x-2)^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n!} \right) (x-2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x-2)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (x-2)^n$$

· $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (x-2)^n$ série absolutamente convergente em $\mathbb{R}$

não tendem para zero

· $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x-2)^n \qquad r = \lim \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| = 1 \qquad x-2 = u \qquad -1 < x-2 < 1 \qquad 1 < x < 3$

$x = 1$, $x = 3$ séries divergentes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n!} \right), \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n!} \right)$

série absolutamente convergente em $]1,3[$

A série é uma série convergente em $]1,3[$ tendo-se

$$f :]1,3[\to \mathbb{R}, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2-x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x-2)^n = \frac{1}{1-(2-x)} + e^{x-2}$$

Funções transcendentes elementares

(i) definidas por recurso a séries de potências
(ii) definidas por recurso ao integral indefinido

Não podem ser expressas como uma combinação finita de operações algébricas

(i) Funções definidas por recurso a séries de potencias

Função exponencial

$$\exp : \mathbb{R} \to \,]0,+\infty[\quad , \quad \exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

série absolutamente convergente em $\mathbb{R}$

- $\exp x \cdot \exp y = \exp(x+y)$
- $\exp 0 = 1$
- $\exp x > 0 \, , \, x \in \mathbb{R}$
- exp é estritamente crescente

Produto de séries absolutamente convergentes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

$$c_n \neq a_n \cdot b_n \qquad c_n = \sum_{y=0}^{n} a_{n-y}\, b_y$$

Funções trigonométricas

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

série absolutamente convergente em $\mathbb{R}$

$$r = \lim \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n+3)!}{(-1)^{n+1}} \right| = +\infty$$

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Funções hiperbólicas

$$\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

serie absolutamente convergente

$$r = \lim \left| \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \right| = +\infty$$

$$\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$

(ii) Funções definidas por recurso ao integral definido

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ função contínua

teorema fundamental do cálculo integral

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

F função contínua e diferenciável

Função logaritmo

Seja $f : [a,b] \subset]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad f(t) = \frac{1}{t}$ função contínua

$F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

- $F(1) = 0$
- Se $x > 1$ $\quad F(x) > 0$
  $0 < x \leq 1$ $\quad F(x) \leq 0$
- F é diferenciável em $]0,+\infty[$ $\quad F'(x) = 1/x$
- F é estritamente crescente $\quad F'(x) = 1/x > 0$
- F é estritamente côncava $\quad F''(x) = -1/x^2 < 0$

$$F(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Função arctan

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ função contínua

$F : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

- F é diferenciável em $\mathbb{R}$ $\quad F'(x) = 1/1+x^2$
- F é estritamente crescente
- F é estritamente convexa em $]-\infty, 0[$
  estritamente côncava em $]0,+\infty[$

$$F''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$F(x) = \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$