FORMULÁRIO PARA MECÂNICA E ONDAS
LMAC e MEBiom, Campus da Alameda - IST
Responsável: Prof. Ana M. Mourão
2019/2020

Mecânica

$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}$, $\quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$

$x(t) = x_o + v_{o,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad , \qquad v_x(t) = v_{o,x} + a_x t \quad , \quad v_x^2 = v_{\rm o,x}^2 + 2a_x(x - x_o)$

$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$, $\quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$

$v_t = \omega R \quad , \quad \vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad \vec{a_c} = -\frac{v_t^2}{R}\,\vec{e_r} = -\omega^2 R\,\vec{e_r} \ , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_R = m\vec{a} \quad , \qquad W_{\rm F} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\vec{F}_G(R) = -G_N \frac{M\,m}{R^2}\vec{e}_r \ , \quad \vec{F}_g = m\,\vec{g} \ , \quad \vec{F}_E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1\,q_2}{R^2}\vec{e}_r \ , \quad \vec{F}_B = q\,\vec{v} \times \vec{B} \quad , \quad \vec{F}_k = -k\,x\,\vec{e}_x$

$F_A = \mu\,N$

$E_m = E_c + E_p\,, \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad E_p(R) = -\frac{G_N M\,m}{R} \quad , \quad E_p(h) = mgh \qquad E_{\rm p,k} = \frac{1}{2}k\,x^2$

$\vec{F} = -grad\,E_P = -\nabla E_P$

$v_1^\star = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \quad$ e $\quad v_2^\star = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \qquad \vec{R}_{\rm CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\,, \quad \vec{v}_{\rm CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{\sum_i m_i}$

$\vec{L} = \vec{r}_i \times \vec{P}_i \ , \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$

$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i \quad , \quad \vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad , \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad , \quad \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$I = \sum_i m_i r_i^2 \ , \quad I = \int_V \rho r^2 dV \ , \quad I_{\rm anel} = mr^2 \ , \quad I_{\rm disco} = \frac{1}{2}mr^2$

$E_{\rm c,t} = \frac{1}{2}Mv_{\rm CM}^2 \ , \quad E_{\rm c,rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$

Movimentos oscilatórios

Exemplos de equações diferenciais e respectivas soluções:

$\ddot{x}+\omega_{\rm o}^2 x=0$ tem como solução $x(t)=A\cos(\omega_{\rm o}t+\varphi_{\rm o})$.

$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_{\rm o}^2 x=0$ tem como solução $x(t)=Ce^{-\lambda t}\cos(\omega t+\varphi_{\rm o})$, onde $\omega=\sqrt{\omega_{\rm o}^2-\lambda^2}$.

$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_{\rm o}^2 x=(F_{\rm o}/m)cos(\omega_{\rm ext}t)$ tem solução que converge no tempo para

$$x(t)=A_{\rm ext}\cos(\omega_{\rm ext}t+\Phi)\,,$$

onde a amplitude A é dada por

$$A_{\rm ext}=\frac{(F_{\rm o}/m)}{\sqrt{(\omega_{\rm o}^2-\omega_{\rm ext}^2)^2+4\lambda^2\omega_{\rm ext}^2}}\ .$$

$\omega_{\rm ext,res}=\sqrt{\omega_{\rm o}^2-2\lambda^2}$

Ondas

$\Phi(x,t)=A\,sen(kx-\omega t+\varphi)$, $v=\frac{\omega}{k}$, $\lambda=\frac{v}{f}$, $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}$

$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$d\sin\theta_{\max}=m\lambda\,,$ $y_{\max}=m\frac{D}{d}\lambda$, $y_{\min}=\frac{2m+1}{2}\frac{D}{d}\lambda$ onde $m=0,\pm1,\pm2,...$

$v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, $\lambda_n=\frac{2\,L}{n}$, $f_n=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, $n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$

Hidrostática e hidrodinâmica

$p=p_{\rm o}+\rho\,g\,y$, $I=\rho_{\rm fluido}\,g\,V_{\rm submerso}$

$A_1\,v_1=A_2\,v_2$, $p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho\,g\,h_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho\,g\,h_2$

Relatividade de Galileu a Einstein

$\vec{r}=\vec{r}_R+\vec{r^*}$ $\vec{v}=\vec{V}_R+\vec{v^*},$ $\vec{a}=\vec{a}_R+\vec{a^*}$

$m\vec{a}=\sum_i\vec{F}_i\,,$ $m\vec{a^*}=\vec{F}_{\rm inercia}+\sum_i\vec{F}_i\,,$ $\vec{F}_{\rm inercia}=-m\vec{a}_R$

$x=\frac{x^*+vt^*}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, $y=y^*$, $z=z^*$, $t=\frac{t^*+\frac{v}{c^2}x^*}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$,

$\Delta L_x=\Delta L_x^*\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$, $\Delta t=\frac{\Delta t^*}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$,

$v_x=\frac{v_x^*+v}{1+\frac{v}{c^2}v_x^*}$, $v_y=\frac{v_y^*}{1+\frac{v}{c^2}v_x^*}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$, $v_z=\frac{v_z^*}{1+\frac{v}{c^2}v_x^*}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$,

$\vec{P}=\frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, $E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$.

Formulário - Mecânica e Ondas

1. Cinemática → Descrição do movimento dos corpos sem considerar as forças associadas.

· coordenadas cartesianas

posição: $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Velocidade média: $\vec{V_m} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i}$

Velocidade instantânea: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$

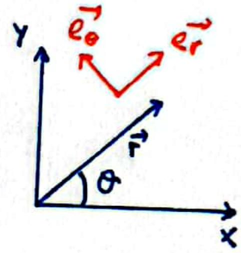
aceleração média: $\vec{a_m} = \frac{\vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)}{t_f - t_i}$

aceleração instantânea: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$

equações do movimento: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$; $v(t) = v_0 + at$ $\quad v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$

· coordenadas polares

$d\cos\phi = V_x t$
$-d\sin\phi = -\frac{1}{2} g t^2$



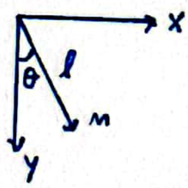
posição: $\vec{r} = r(t)\vec{e_r} = r\cos\theta(t)\vec{e_x} + r\sin\theta(t)\vec{e_y}$ ⚠

$\vec{e_r}(t) = \cos\theta(t)\vec{e_x} + \sin\theta(t)\vec{e_y}$
$\vec{e_\theta}(t) = -\sin\theta(t)\vec{e_x} + \cos\theta(t)\vec{e_y}$

Velocidade: $\vec{V} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

aceleração: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$

equação do movimento do pêndulo: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ (para pequenas oscilações $\sin\theta \approx \theta$)



· movimento circular

→ Em coordenadas polares, r = constante

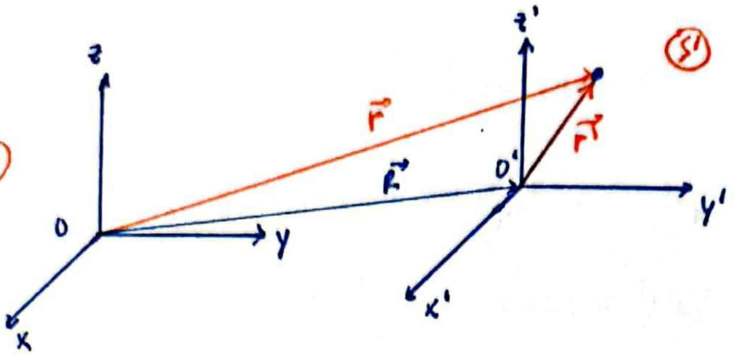
velocidade: $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = r\omega$

aceleração: $\vec{a} = \underbrace{r\ddot{\theta}\vec{e_\theta}}_{\text{ac. tangencial}} - \underbrace{r\dot{\theta}^2\vec{e_r}}_{\text{ac. centrípeta (normal)}} = r\dot{\omega} + \underbrace{r\omega^2}_{a_c(t)} = \frac{v^2}{r}$

se o módulo de $\vec{v}$ for constante, $\dot{v} = 0 \Leftrightarrow \dot{\omega} = 0$ logo só existe ac. centrípeta

Nota: $\omega = \dot{\theta}$ → velocidade angular $\quad v = \omega \cdot R$

· **Movimento relativo** 2 referenciais em movimento um em relação ao outro



Nota: S' move-se a velocidade $\vec{V}$ em relação a S

posição (do ponto em relação a S): $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$

velocidade: $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$

aceleração: $\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$ $\qquad \vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$

⚠

equação de Euler-Lagrange: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = 0$ $\quad$ r → variável. É preciso 1 equação p/ cada variável em causa

$\mathcal{L} = T - U$ ← energia potencial

$\mathcal{L}$: função de Lagrange; T: energia cinética

Na presença de forças exteriores: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = F^{ext}$

2. Dinâmica → Estudo dos movimentos de corpos sob a ação de forças

· **Leis do movimento de Newton**

① Lei da inércia: $\underbrace{\sum \vec{F} = 0}_{\text{na ausência de forças}} \Rightarrow$ repouso / movimento uniforme
$(v=0)$ $\quad (a=0,\ v = \text{const.})$

② Lei Fundamental do Movimento: $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$ (se m = const.) — a aceleração depende das forças aplicadas no corpo

[MOV. CIRCULAR (em coord. polares)
· $F_c = m.w^2.r$
· $F_t = m.\dot{w}.r$]

③ Lei da Ação e Reação: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ — Qualquer ação de um corpo sobre outro provoca uma reação de igual módulo e direção c/ sentido oposto

3. Trabalho e Energia

- trabalho da força $\vec{F}$: $W = |\vec{F}|.|\Delta\vec{r}|.\cos\alpha$

trabalho de uma força variável entre b e c: $W_{bc} = \int_b^c F(x)\,dx = P(c) - P(b)$

Teorema do trabalho - energia: $\Delta E_c = W_{\vec{F_R}}$ A variação da energia cinética ($E_c = \frac{1}{2}mv^2$) é igual ao trabalho da força resultante

Potência: $P = \vec{F}.\vec{v}$ trabalho realizado por unidade de tempo

4. Conservação da energia

- forças conservativas: o seu trabalho é zero durante um movimento por uma curva fechada com início e fim no mesmo ponto. ex: forças de ligação $\Delta E_m = 0$

força de atrito: força não conservativa dissipativa (realiza trabalho negativo)

$\vec{F_a} = -\mu |\vec{v}|^{\alpha} \vec{e_v}$

coeficiente de atrito

$\alpha = 0$ Atrito sólido - sólido

$\alpha = 1$ Atrito sólido - fluido

$\alpha = 2$ Atrito sólido - fluido

fator de forma

$\mu = K\vec{P} = Km\vec{g}$

$\vec{F_a} = -K\eta\vec{v}$

$\mu = K \times \eta$ viscosidade

impulsão: $I = -m' g\, \vec{e_z}$

$-\rho . V$ (massa do fluido)

- energia potencial (U): $U = -W_F$ energia potencial associada à força F

energia mecânica: $E_m = U + T = U + \frac{1}{2}mv^2$

$\boxed{\Delta E_m = W_{FNC}}$ A variação da E_m é igual ao trabalho das forças não conservativas

—//—

notas:

Campo gravítico: $\vec{F} = -G\frac{M.m}{r^2}\vec{e_r}$

na superfície da terra: Usamos mgh para U, sendo $g = G\frac{M}{R_T^2}$

- Potencial Gravítico: $\vec{F_G} = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e_r}$, $U_G = -G\frac{Mm}{r}$

Velocidade de Escape: $v_0 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$

Mecânica e Ondas

Programa:

· Prólogo: análise dimensional

· Cinemática:

- Descrição do movimento no espaço e no tempo
- Velocidade e aceleração
- Rotações. Velocidade e aceleração angular.
- Movimento relativo e o Princípio da Relatividade
- Relatividade de Galileu

· Dinâmica Newtoniana:

- Princípio de inércia
- Conceitos de massa e força
- Relação entre força e movimento: a 2ª Lei de Newton
- Equações do movimento. Condições iniciais.
- Princípio de Acção e Reação
- Forças de constrangimento. tensão

· Simetria e Leis de conservação:

- Conservação do momento linear. O centro de massa.
- Conservação da energia. Energia cinética e potencial.
- Conservação do momento angular. Conceito de torque

· Interação entre sistemas:

- Definição de sistema de forças. Forças internas e externas.
- Momento de uma força. Noções básicas de estática.
- Trabalho de uma força. Sistemas conservativos e dissipativos.
- Movimento de sistemas de partículas
- Estabilidade de sistemas

Movimento do corpo rígido:

- Rotação do corpo rígido
- Momentos de inércia

Oscilações:

- Oscilação harmónica simples. Oscilador harmónico e o pendulo gravítico
- Oscilações com atrito e forçadas
- Osciladores acoplados

Ondas:

- Propriedades das ondas: Velocidade de propagação, amplitude, frequência e fase
- Equação das ondas
- Ondas transversais e ondas longitudinais.

Mecânica de fluidos:

- Pressão hidrostática
- Princípio de Arquimedes

A Relatividade Restrita de Einstein:

- A velocidade de propagação da luz no vácuo
- A experiência de Michelson-Morley e as suas sucessoras
- A transformação de Lorentz
- Dilatação do tempo
- Contração do espaço
- Dinâmica Relativista. A energia e o momento linear relativistas

Módulo 1: Análise dimensional

Propriedades das grandezas físicas

· Uma quantidade física é definida mediante a especificação de duas operações:
- Comparação
- Adição

· Propriedades dessas operações

· $X + Y = Y + X$ (comutatividade)

· $(X+Y) + Z = X + (Y + Z)$ (associatividade)

· $X + Y = Z \Rightarrow \nexists W_{neces.} : X + Y + W = Z$ (unicidade)

Nota: Última propriedade válida, no caso de velocidades, se $v < c$

Unidades:

Se x representar a unidade padrão e X a quantidade a medir, o processo de medição fornece um valor $m \in \mathbb{R}$, tal que

$$\boxed{X = m x}$$

Não há nada de fundamental na escolha de x como unidade padrão. Outro observador pode escolher para a mesma medição o padrão y:

$$\boxed{X = m' y \quad \text{com} \quad x = a y \Rightarrow X = m a y \Rightarrow m' = a m}$$

Gradezas que resultam de combinações númericas do resultado de medições, designam-se por grandezas derivadas de 1ª especie (ex: v é dada por dx/dt)

Digitalizada com CamScanner

⇒ Só podemos comparar grandezas do mesmo tipo e que por isso têm as mesmas unidades (homogeneidade dimensional)

Princípio de Bridgman

Um número Q obtido a partir de valores numéricos de quantidades de base inseridos numa fórmula é uma quantidade física se a razão entre duas quaisquer das suas realizações permanece constante quando as unidades padrão são alteradas.

$$\frac{X}{Y} = \frac{X'}{Y'}$$

Dimensão de uma grandeza física

Quando a uma unidade está associado um valor numérico que depende da escolha das unidades base dizemos que tem a dimensão dessas unidades base.

ex: se a uma quantidade X corresponde um valor numérico associado a uma medição de tempo dizemos que tem a dimensão de tempo e escrevemos $[X] = [t]$

Isso significa:
- precisamos, para medir, de uma unidade padrão de tempo
- quando se muda a escala do padrão escolhendo um relógio cuja unidade é α vezes menor que a unidade anterior, o valor numérico de X aumenta de um fator α:

→ Na verdade, mesmo que não saibamos nada sobre uma dada equação física é possível estabelecer a sua validade apenas verificando a homogeneidade dimensional.

O <u>procedimento</u> é muito simples:

1. verificar, em qualquer soma de quantidades existente na equação, se todos os termos da soma têm a mesma dimensão.

2. verificar, para todas as funções especiais (trigonométricas, logaritmo, exponencial, etc), se os seus argumentos são adimensionais.

3. finalmente, verificar se ambos os lados da relação têm a mesma dimensão.

<u>ex</u>: Numa amostra de uma substância radioativa o número de núcleos $N(t)$ de uma dada especie num dado instante t é dado por

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

Qual a dimensão de N_0 e de k?
↳ Numero moles (adimensional)

Por homogeneidade dimensional N_0 tem de ser adimensional (é um número) já que a exponencial é uma função adimensional.

Quanto $t=0 \Rightarrow N(0) = N_0$, ou seja, N_0 é o <u>número inicial de átomos</u>

O argumento da exponencial tem de ser adimensional, ou seja:

$[K][t] = 1 \Rightarrow [K] = [t]^{-1}$, isto é, uma frequência.

Corresponde à frequência com que o número de núcleos se reduz de metade.

Módulo 2 : Fundamentos

A Física tem por objetivo estabelecer relações entre fenómenos observáveis. Um dos seus maiores sucessos foi sem dúvida o de descobrir que, apesar da multitude desses fenómenos, o número de relações - as chamadas leis físicas - é limitado, ou seja, existe aparentemente uma lógica subjacente à estrutura e funcionamento do nosso Universo e que existe uma forma eficiente de descrever essas leis usando conceitos matemáticos.

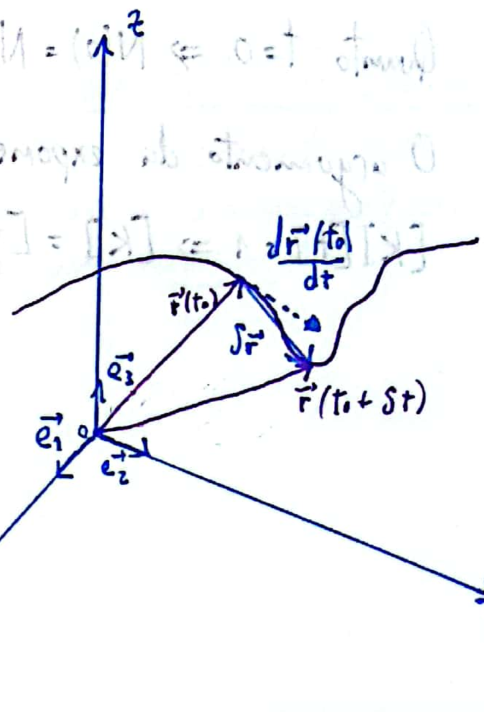
A noção física de vetor

Para que um vetor tenha utilidade como elemento de representação e de cálculo tem de ser acauteladas algumas propriedades básicas.

A primeira é que possamos apresentá-lo numa folha de papel independentemente da sua verdadeira magnitude.
Para isso um vetor tem de poder ser sujeito a transformações de escala.

A derivada de um vetor

A derivada da função vetorial $\vec{r}(t)$ em ordem a t no ponto t_0 é:



$$\boxed{\frac{d\vec{r}(t_0)}{dt} = \lim_{\delta t\to 0} \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+\delta t)-\vec{r}(t_0)}{\delta t}}$$

$$\frac{d\vec{r}(t_0)}{dt} = \frac{d\vec{r_1}(t_0)}{dt}\vec{e_1} + \frac{d\vec{r_2}(t_0)}{dt}\vec{e_2} + \frac{d\vec{r_3}(t_0)}{dt}\vec{e_3}$$

O conceito de velocidade

→ O vetor de posição diz onde estamos; a velocidade diz para onde vamos.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Esta derivada indica a taxa de variação da posição com o tempo ao longo da trajetória e é o vetor velocidade do sistema.

Em termos de componentes, a velocidade é $\boxed{\vec{v} = \dot{x}\vec{e_1} + \dot{y}\vec{e_2} + \dot{z}\vec{e_3}}$

onde o ponto sobre a variável é a notação usual para a primeira derivada em ordem ao tempo.

A velocidade é portanto um vetor de componentes $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

O conceito de aceleração

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

A aceleração também pode ser expressa em termos de componentes:

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_1} + \ddot{y}\vec{e_2} + \ddot{z}\vec{e_3}}$$

→ é importante ter em mente que a aceleração não aponta necessariamente na direção do movimento.

Forças e Campos

A noção de força, central em toda a Mecânica, é provavelmente o conceito mais difuso que existe na teoria...

As Leis de Newton

1ª lei (Princípio da inercia) Qualquer corpo permanece no seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme a menos que uma força atue sobre ele para alterar o seu estado.

→ Não é preciso uma força para estarmos em movimento

→ Não é possível demonstrar esta lei

2ª lei ($\vec{F} = d\vec{p}/dt$) A variação temporal do momento linear $\vec{p}$ de um corpo, definido como o produto da sua massa m pela sua velocidade $\vec{v}$ é igual à força total $\vec{F}$ atuando sobre o corpo.

→ $\vec{F} = m\vec{a}$ só é válido quando a massa do corpo é constante.

3ª lei (Princípio de Ação-Reação) As forças que dois corpos exercem um sobre o outro são sempre iguais em módulo, agem segundo a linha que os une, têm sentidos opostos e estão aplicadas uma em cada corpo. *

(porque quando nos apoiamos numa mesa ou parede não entramos dentro dela?)
↳ 3ª lei de newton

<u>Dedução da equação do movimento</u>
(Um corpo é largado na vertical (sem atirar) de uma altura)

$$\frac{dmv}{dt} = P = mg \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = g}$$

Temos $dv = g\,dt \Rightarrow v(t+dt) - v(t) = g\,dt$

<u>Seja v_0 a velocidade inicial</u>:

$t = 0 \Rightarrow v(0) = v_0$ i

$t = 0 + dt \Rightarrow v(0+dt) = v_0 + g\,dt$

...

$t = 0 + n\,dt \Rightarrow v(0+n\,dt) = v_0 + ng\,dt$

... até ao instante final t.

ou ainda

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t g\,dt \Rightarrow v - v_0 = g(t-0) = gt$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + gt}$$

Esta é a solução da equação do movimento para a velocidade.

Para a trajetória temos de nos lembrar que

$v(t) = \frac{dz}{dt} \Rightarrow dz = v(t)\,dt$. Usando o mesmo argumento que antes:

$$\int_0^z dz = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t (v_0 + gt)\,dt \Rightarrow z - 0 = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

$$\boxed{z(t) = v_0 t + \frac{gt^2}{2}}$$

As Leis de Newton

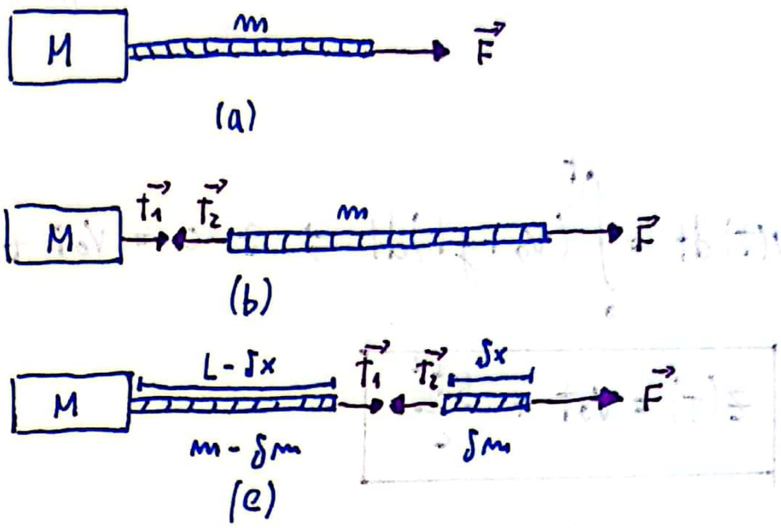
Às três leis de Newton têm ainda de ser adicionado o princípio da sobreposição das forças (que mais não é do que a nossa já conhecida regra do paralelogramo).

Método de decomposição de forças

Globalmente o corpo move-se como se apenas uma força, igual à soma vetorial de todas as forças aplicadas, estivesse a atuar sobre ele.

* Se todas as forças presentes no Universo não se compensassem a sua soma poderia não ser nula e: logo o Universo, como um todo, não estaria em equilíbrio.
(3ª lei de Newton)

A força de tensão



Situação (b):

- No bloco está aplicada a força $\vec{T_1}$
- Na corda estão aplicadas as forças $\vec{F}$ e $\vec{T_2}$

A força $\vec{T_2}$ é a tensão e o Princípio de Ação-Reação garante-nos que $\vec{T_1} = -\vec{T_2}$

$$\boxed{a = \frac{F}{M+m}}$$ → assumindo que as massas são constantes.

Bloco: $Ma = T_1$

Corda: $ma = F - T_1$ $\Rightarrow$ $$\boxed{T_1 = \frac{M}{M+m} F}$$

↳ $T_1 = F$ só se a massa da corda for desprezável.

Situação (c):

L é o comprimento total da corda.

$\rho = m/L$ (constante) densidade linear da massa.

Para o segmento de massa $\delta m = \rho \delta x$

$$F - T_2 = \rho \delta x a \Rightarrow T(2) = F - \overbrace{\rho \delta x}^{m} a$$

A tensão é portanto uma função da posição x

$$\boxed{T_2 = T(\delta x)}$$

Imaginemos então que dividimos a corda em n segmentos iguais. No K-ésimo elemento temos

$$\boxed{T(K\delta x) = F - K\delta x \rho a}$$

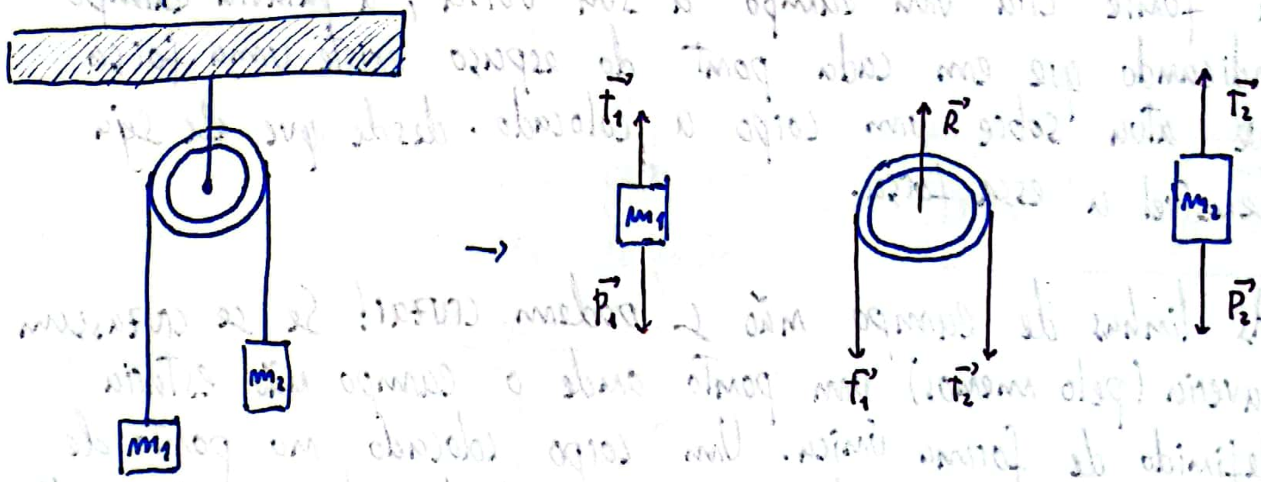
ou se preferimos, dada a definição de x,

$$\boxed{T(x) = F - \rho a x}$$

Para $x = L$, dado que $\rho L = m$

$$\boxed{T(L) = F - m\frac{F}{M+m} = \frac{M}{m+M}F}$$

ex: Máquina de Atwood



A 2ª Lei de Newton diz-nos então que:

- para a massa m_1: $m_1 a = T - m_1 g$
- para a massa m_2: $-m_2 a = T - m_2 g$

Concluímos assim que a tensão T é:

$$\boxed{T = 2\mu g \Rightarrow R = 4\mu g}$$

onde

$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$ é uma quantidade designada por massa reduzida do sistema.

A aceleração com que as massas se movimentam é:

$$\boxed{a = g\,\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}}$$

A noção de campo

Para além das forças que agem apenas quando há contacto material existem ainda na Natureza forças, como a gravidade, que agem à distância.

Se singularizarmos um dos corpos esse corpo pode ser considerado como a fonte da força que age sobre outro que esteja dentro do alcance da força.

A fonte cria um campo à sua volta, a palavra campo indicando que em cada ponto do espaço existe uma força que atua sobre um corpo aí colocado, desde que ele seja sensível a essa força.

As linhas de campo não se podem cruzar! Se se cruzassem haveria (pelo menos) um ponto onde o campo não estaria definido de forma única. Um corpo colocado no ponto de cruzamento não poderia saber qual das duas ações escolher.

Um modelo para o campo gravítico

massa (ex: sol)

$$\boxed{\vec{G} = -G\,\frac{M}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}}$$

$\vec{r}$ → vetor posição de um ponto no espaço

r → distância ao sol, por exemplo

$\vec{G}$ → Campo Gravítico

G → Constante da gravitação de Newton $= 6{,}67408 \times 10^{-11}\, m^3 . Kg^{-1} . s^{-2}$

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{G} = -G\,\frac{mM}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}}$$

A sua densidade, medida como o número N de linhas de campo por unidade de superfície de uma esfera de raio r em torno do centro do sol, é $N/4\pi r^2$, o que é consistente com a forma como a intensidade do campo varia com a distância.

→ A força com que a terra nos atrai é exatamente igual à força com que nós atraímos a Terra.

→ Nem todos os campos são radiais (ex: campo magnético)

Repare-se ainda que o conceito de massa aparece em duas leis de Newton: na 2ª Lei ($\vec{F} = d(m\vec{v})/dt$) e na Lei da Gravitação Universal.

↓

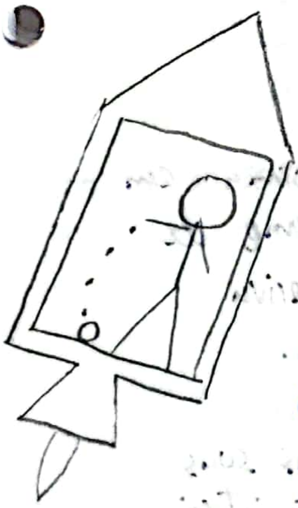
Essas duas massas, por estarem associadas a fenómenos físicos **Totalmente diferentes**

(Um tem haver com uma atração à distancia, o outro tem haver c/ algo que de facto movimentar-se) → ñ implica movimento

↓

Não têm razão para serem iguais. Mas, de facto **são iguais** → $\boxed{m_{in}\,\vec{a} = m_{gr}\,\vec{G}}$

↓ **Einstein**



Se as duas massas são iguais um observador não pode distinguir a diferença entre estar sujeito a um campo de gravidade ou estar a mover-se com uma aceleração igual à intensidade do campo gravítico.

↓

Princípio de Equivalência

Módulo 3: A relatividade de Galileu

Princípio da Objetividade: assume-se que um fenómeno é real (ou seja, intrinsecamente pertencente ao mundo exterior) se é visto por todos os possíveis observadores e se a informação obtida por cada um deles pode ser comparada de forma inequívoca com a obtida por qualquer um dos outros.

Nota: O fenómeno só é objetivo se existir um procedimento de conversão de informação que permita ter uma descrição idêntica do fenómeno para os dois observadores.

→ Se a velocidade máxima de propagação da informação entre dois pontos do espaço for finita: Nesse caso não é garantido que dois acontecimentos possam estar ligados entre si e estabelecer a relação de causalidade deixa de ser possível em certos casos.

(Princípio da Causalidade)

↳ Causalidade só está garantida se não houver limite para a velocidade c/ que decorre o processo.

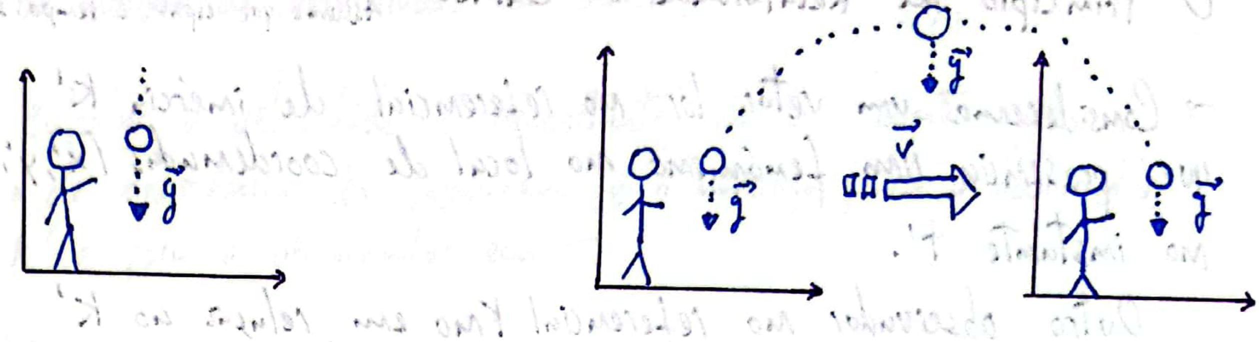
Referenciais inerciais

→ As leis da Mecânica Newtoniana têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais e por isso o nome de referencial de inércia tem toda a razão de ser: deriva da sua relação profunda com o Princípio de Inércia.

→ Isso não quer dizer, todavia, que quando compararem os seus conclusões, dois observadores, descrevam a mesma trajetória

→ Embora a equação do movimento seja a mesma, a solução dessa equação pode ser diferente para dois observadores.

Ex:



Observador no Comboio

$V_x = 0$

$V_z = V_0 - gt$ → velocidade inicial

$x = 0$

$z = z_0 + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

↓ posição inicial

Observador na paragem de comboio

$V_x = V_x$

$V_z = V_0 - gt$

$x = V_x t$

$z = z_0 + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

→ Caso o comboio trave bruscamente, a gravidade deixa de ser suficiente para descrever o movimento da bola. O observador tem de introduzir na sua descrição a força de inércia F_{in}

$$\boxed{F_{in} = -m \frac{dv}{dt} = -m a_x}$$

(Neste caso)

tem de estar relacionada com a modificação da velocidade.

→ o observador deixou de ser um referencial inercial (referencial não inercial)

Nota: Não sabemos porque o Princípio da Inércia existe.

Princípio de Mach

↑

A propriedade de inércia seria uma consequência da estrutura em larga escala do Universo. ← possível explicação dada por Einstein

(Não sabemos até agora se esta é a sua razão de existência)

O Princípio de Relatividade de Galileu

Assume que espaço e tempo são absolutos.

→ Consideremos um observador no referencial de inércia K' que presencia um fenómeno no local de coordenadas (x', y', z') no instante t'.

Outro observador no referencial K, em relação ao K' se move com a velocidade constante $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$, observa o mesmo fenómeno no ponto de coordenadas (x, y, z) no instante t.

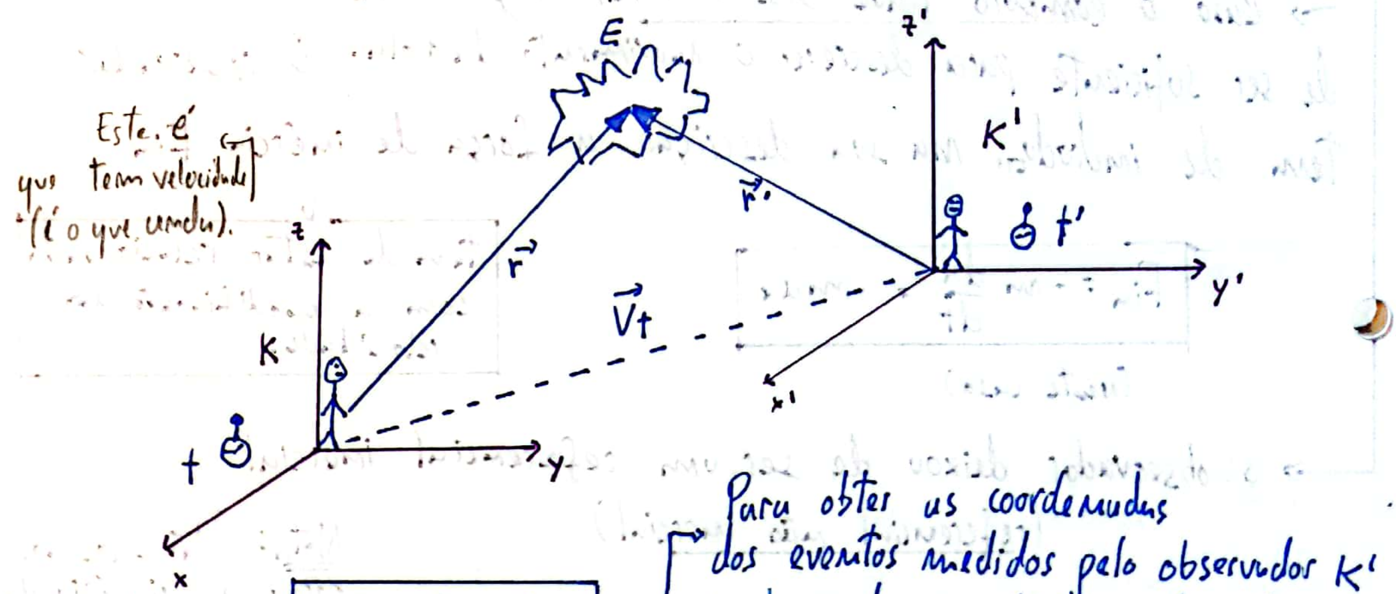
$$t' = t$$
$$x' = x - V_x t$$
$$y' = y - V_y t$$
$$z' = z - V_z t$$

$\Longrightarrow$ usando notação matricial

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -V_x & 1 & 0 & 0 \\ -V_y & 0 & 1 & 0 \\ -V_z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

↳ se não começarem no mesmo sítio

(Assumindo que $\vec{r_0} = (0,0,0)$) → começam no mesmo sítio



Assim, $\boxed{\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}(t)}$

Para obter as coordenadas dos eventos medidos pelo observador K' o observador em K tem de retirar o espaço percorrido no seu referencial por K' entre o instante inicial e o instante em que ocorre o evento.

Reciprocamente,

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t}$$

→ Só é uma boa aproximação para velocidades relativas muito menores que a velocidade da luz.

Lei de adição de velocidades de Galileu

- Para calcular a velocidade é importante ter em conta que o tempo de ocorrência do fenómeno é o mesmo para o observador em K' e para o observador em K.

Assim,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + V_x \qquad v_x = v'_x + V_x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} + V_y \quad \Leftrightarrow \quad v_y = v'_y + V_y \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'} + V_z \qquad v_z = v'_z + V_z$$

onde,

$\vec{v} = d\vec{r}/dt$

$\vec{v}' = d\vec{r}'/dt'$

Se agora calcularmos as acelerações associadas ao evento, encontramos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \vec{a}'}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2}$$

Isto indica a ausência de acelerações adicionais para fenómenos ocorrendo em referenciais inerciais.

⇓

Dito de outra forma, <u>as leis de Newton são invariantes para as transformações de Galileu</u> entre referenciais inerciais como já tínhamos concluído anteriormente

↓

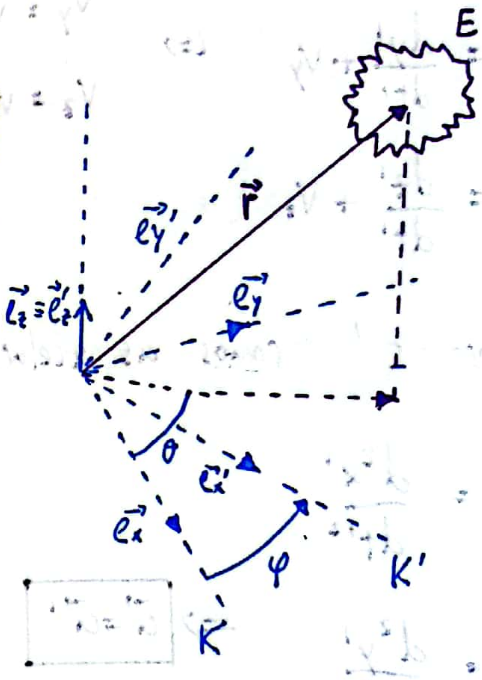
Toda a Mecânica de Newton permanece coerente entre referenciais inerciais.

Rotações (temos ainda de considerar as transformações entre observadores cujos referenciais estão relacionados por uma rotação).

→ As transformações que serão consideradas são entre referenciais de inercia. Correspondem portanto a operações aplicáveis a referenciais que estão rodados de forma fixa um em relação ao outro.

Estando os referenciais rodados em torno do eixo comum z a componente segundo esse eixo é a mesma para os dois.

O mesmo não acontece às componentes segundo os eixos x e y no referencial K que serão, no referencial K', dados por



$$\boxed{\begin{aligned} x' &= r\cos(\theta-\varphi) = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= r\sin(\theta-\varphi) = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}}$$

· Matrizes de Rotação

Em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A <u>matriz de rotação</u>:

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

permite converter as componentes no plano xy do vetor $\vec{r}$ entre os dois referenciais.

Se incluirmos a componente z a mesma rotação é representada pela matriz tridimensional

$$\boxed{R_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

É interessante ver a ação desta operação quando o ângulo de rotação entre dois observadores é infinitesimal. Designemos esse ângulo por $d\varphi$. Expandindo o seno e o cosseno até à primeira ordem da série de Taylor, temos:

$$R_3(d\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & d\varphi & 0 \\ -d\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d\varphi & 0 \\ -d\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A relação entre o vetor $\vec{r}$ no referencial K e o vetor $\vec{r}\,'$ no referencial rodado K' é,

$$\vec{r}\,' = R_3(d\varphi)\vec{r} = \vec{r} + \begin{bmatrix} 0 & d\varphi & 0 \\ -d\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\vec{r}$$

Para obter $\vec{r}\,'$ a partir de $\vec{r}$ temos então de somar o vetor $d\vec{r}$ com as componentes:

$$\boxed{\begin{aligned} dx &= -d\varphi\, y, \\ dy &= d\varphi\, x, \\ dz &= 0. \end{aligned}}$$

Se definirmos o vetor $\vec{d\varphi} = d\varphi\,\vec{e_z}$, onde $\vec{e_z}$ é o vetor unitário ao longo do sentido positivo do eixo dos zz, vemos que o resultado anterior é equivalente a,

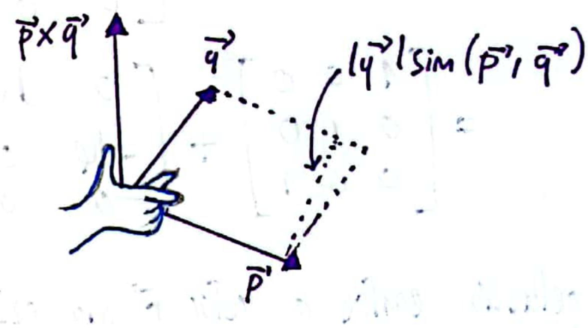
$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} - d\varphi\, y\,\vec{e_x} + d\varphi\, x\,\vec{e_y} = \vec{r} + \vec{d\varphi} \times \vec{r}}$$

<u>Nota</u>: Resultados semelhantes podem ser obtidos para rotações infinitesimais em torno de qualquer eixo.

· Parêntesis: como calcular o produto externo

$\vec{p} \times \vec{q}$, <u>método simples</u>:

Construir o plano subentendido por $\vec{p}$ e $\vec{q}$; considerar o vetor perpendicular a esse plano com a direção dada pela regra da mão direita e



$$|\vec{p} \times \vec{q}| = |\vec{p}|\,|\vec{q}|\,\sin(\vec{p},\vec{q})$$

$\vec{p} \times \vec{q}$, <u>método do Determinante</u>:

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = (p_2 q_3 - p_3 q_2)\vec{e_1} + (p_3 q_1 - p_1 q_3)\vec{e_2} + (p_1 q_2 - p_2 q_1)\vec{e_3}$$

· O movimento circular

A descrição em coordenadas cartesianas é sempre válida, mas nem sempre é a mais económica. Tomemos o caso de um corpo movendo-se numa trajetória circular num plano.

A trajetória é assim definida pelo conjunto de pontos $(x(t), y(t))$. Sabemos, todavia, que a trajetória é circular com um raio constante $\boxed{r^2 = x^2(t) + y^2(t)}$

Isto quer dizer que o movimento necessita apenas de uma grandeza física para ser descrita, ou seja, tem apenas um grau de liberdade.

A partir da expressão acima, temos:

posição em y $\rightarrow$ $y(t) = \pm\sqrt{r^2 - x^2(t)}$

Derivando, tem-se:

velocidade em y $\rightarrow$ $V_y = \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x(t)}{\sqrt{r^2 - x^2(t)}}\dfrac{dx(t)}{dt} = -\dfrac{x(t)}{y(t)}V_x(t)$

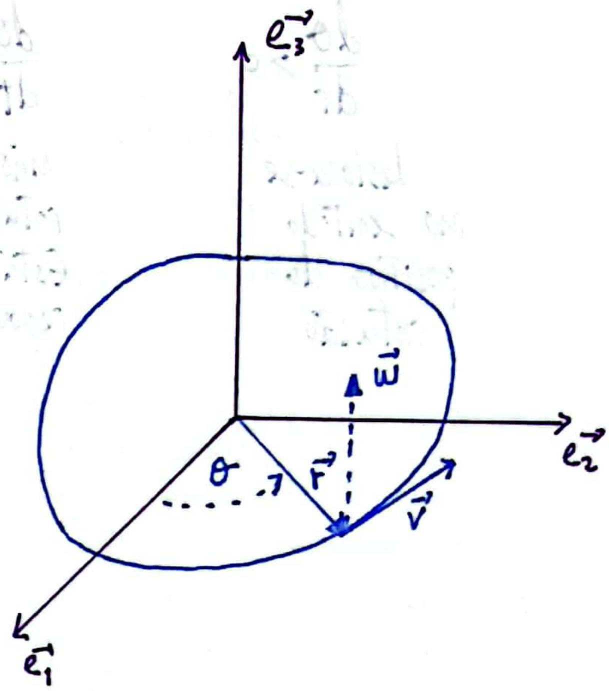
Derivando novamente, tem-se:

aceleração em y $\leftarrow$ $a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{1}{y}\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right)V_x^2 + \dfrac{x}{y}a_x$

O movimento circular no plano

Em particular,

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= r\cos\theta \\ y(t) &= r\sin\theta \end{aligned}}$$



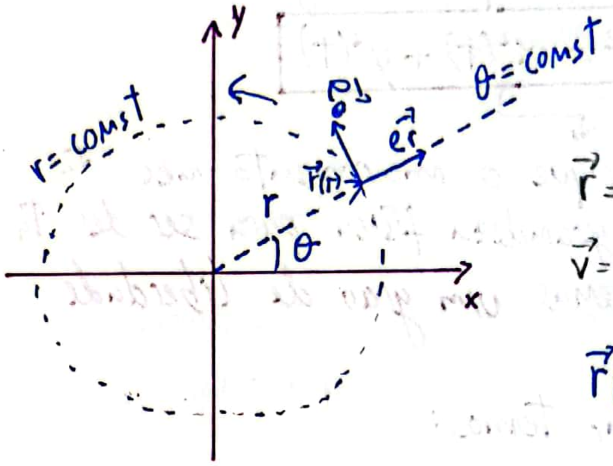
Com esta definição,

$$\boxed{\begin{aligned} V_x(t) &= -r\sin\theta(t)\,\dot{\theta} = -y\dot{\theta} \\ V_y(t) &= r\cos\theta(t)\,\dot{\theta} = x\dot{\theta} \end{aligned}}$$

e

$$\boxed{\begin{aligned} a_x(t) &= -x\dot{\theta}^2 - y\ddot{\theta} \\ a_y(t) &= -y\dot{\theta}^2 + x\ddot{\theta} \end{aligned}}$$

Parêntesis: Coordenadas Polares



$\vec{r} = \vec{e_n} = \cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}$

$\vec{v} = \vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y}$

$\vec{r}(t) = \cos\theta(t)\,\vec{e_x} + \sin\theta(t)\,\vec{e_y}$
(para $r=1$)

↓ Para r genérico

$\vec{r}(t) = r\theta(t)\vec{e_n} \longrightarrow \boxed{\vec{r}(t) = r\cos\theta(t)\,\vec{e_x} + r\sin\theta(t)\,\vec{e_y}}$

C.A

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = \frac{d\cos\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\left(-\sin\theta(t)\frac{d\theta}{dt}\vec{e_x} + \cos\theta(t)\frac{d\theta}{dt}\vec{e_y}\right)$$

$$= r\frac{d\theta}{dt}\left(-\sin\theta(t)\,\vec{e_x} + \cos\theta(t)\,\vec{e_y}\right)$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}$$

$\frac{d\theta}{dt} > 0$ desloca-se no sentido positivo da rotação

$\frac{d\theta}{dt} = 0$ não há rotação. Está em repouso

$\frac{d\theta}{dt} < 0$ desloca-se no sentido negativo da rotação

O movimento circular no plano.

Se designarmos de novo por $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ os vetores unitários ao longo do sentido positivo dos eixos x, y e z, respetivamente e calcularmos o produto externo

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\dot{\theta}\vec{e_1} + x\dot{\theta}\vec{e_2}$$

vemos que

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

O vetor $\vec{\omega}$ designa-se por velocidade angular. Por sua vez,

$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \omega\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) =$$
$$= \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} - |\omega|^2\vec{r}$$

onde utilizamos a relação de Lagrange

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Para um observador parado (a ver o movimento de rotação)

O observador conclui que o corpo está sujeito a uma força que o obriga a mudar o seu curso a cada instante

A força tem duas contribuições:

$$\boxed{\vec{F_c} = -m|\omega|^2\vec{r}}$$

que atua segundo $\vec{r}$, mas no sentido oposto. Designa-se por força centrípeta por estar orientada para o centro de rotação

$$\boxed{\vec{F_\omega} = m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r})}$$

segundo a direção da velocidade, mas cujo sentido depende da variação da velocidade angular $\vec{\omega}$ com o tempo. Esta componente não está presente se $\vec{\omega}$ for constante, o que vamos assumir no resto da secção.

Para o observador no corpo de rotação:

Embora parado no seu referencial este observador está permanentemente sujeito a uma força inercial por não se encontrar num referencial de inércia.

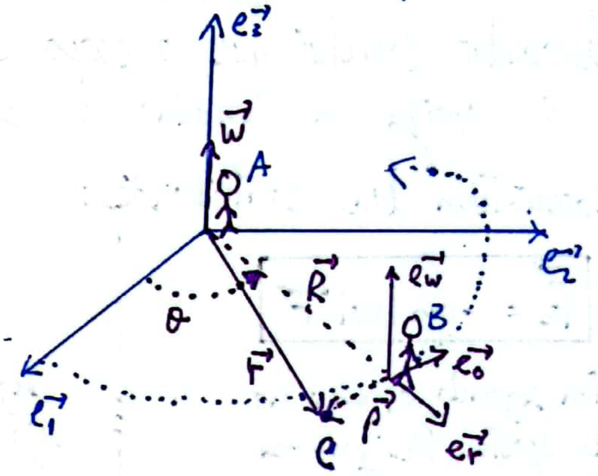
A aceleração é, para este observador, centrífuga uma vez que ele vai sentir uma força radial que tenta obrigá-lo a cada instante a manter um movimento retilíneo e uniforme.

Essa força é designada por força centrífuga uma vez que aponta na direção oposta ao centro de rotação.

> Repare-se que a força centrípeta só existe para o observador A, enquanto a força centrífuga só existe para o observador B. Os dois observadores estão em referenciais completamente diferentes: um é inercial e o outro não.

A visão dos observadores (considerando $\vec{w}$ constante)

→ O problema que agora se põe é o de saber como comparar as medições realizadas pelos observadores A e B para um dado fenómeno, por exemplo, o movimento de outro corpo C



O vetor de posição $\vec{r}$ de C no referencial parado está relacionado com o vetor de posição $\vec{R}$ de B nesse referencial e com o vetor de posição $\vec{\rho}$ de C visto a partir do referencial B por $\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$. Logo:

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}}$$ → derivando em relação ao tempo

Usando $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, fica:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{R} + \frac{d(\rho_\theta \vec{e_\theta} + \rho_r \vec{e_r})}{dt}$$

Para continuar temos de ter em conta que agora os vetores $\vec{e_\theta}$ e $\vec{e_r}$ variam com o tempo, o que implica

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{R} + \frac{d\rho_\theta}{dt}\vec{e_\theta} + \rho_\theta \frac{d\vec{e_\theta}}{dt} + \frac{d\rho_r}{dt}\vec{e_r} + \rho_r \frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

Usando o mesmo raciocínio que levou à equação $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ temos.

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e_\theta} = -\dot{\theta}\vec{e_r} \quad , \quad \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e_r} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

o que implica

$$\boxed{\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade do sistema vista no sistema em repouso e $\vec{V}$ a velocidade vista no sistema em movimento

a aceleração do corpo C pode ser encontrada diferenciando de novo:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{\alpha} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

Usando a relação de Lagrange fica:

$$\boxed{\vec{a}_{centrípeta} = -|\omega|^2 r^2}$$

Reencontramos assim a aceleração centrípeta associada ao movimento do sistema.

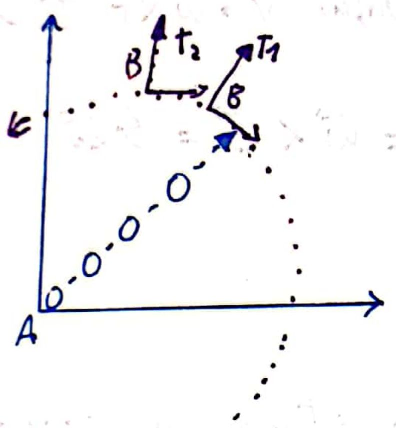
O termo

$$\boxed{\vec{a}_{Coriolis} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}}$$

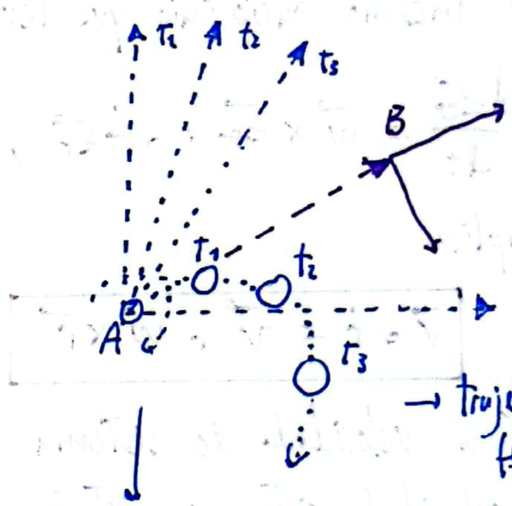
designa-se por aceleração de Coriolis

Para compreender imaginemos que o sistema de estudo é um corpo de massa m lançado radialmente com velocidade $\vec{v}$ pelo observador A (em repouso) em direção ao observador B

Do ponto de vista de A:



Do ponto de vista de B:



→ trajetória resultante: força Coriolis e da força centrífuga

O corpo B percorre uma trajetória curva, que ele interpreta como o efeito da aceleração de Coriolis e que mais não é do que uma consequência do seu movimento de rotação em torno de A.

Para A poder comparar a velocidade do corpo no seu referencial com a velocidade medida no referencial de B precisa de somar o termo $\vec{\omega} \times \vec{r}$ que é simplesmente a velocidade linear associada ao movimento de rotação no ponto $\vec{r}$.

Módulo 4: Princípios de Conservação

· O princípio de Conservação do momento linear

Pela 2ª Lei de Newton sabemos que a força está relacionada com a variação temporal do momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}}$$

Quando a força $\vec{F}$ é nula: $m\vec{v} =$ constante

O momento linear do sistema permanece constante no tempo quando o sistema está isolado.

A mesma força pode ser externa ou interna dependendo da forma como o sistema é definido. Isso significa que qualquer força externa pode ser tornada interna através de uma redefinição conveniente do sistema.

Lua-Terra
↳ F_g → Interna

Sistema Sol+Terra
↑ Lua (F_g)
Externa

—〃—

Imaginando um corpo livre de interações se separa espontâneamente em N pedaços que se deslocam livremente cada um a sua velocidade $\vec{v_i}$, e a sua massa m_i.

Na ausência de forças exteriores, antes da separação: $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ ↓ mantinha-se constante

Se a massa se conservar,

$$\boxed{m = \sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Sendo o momento linear uma grandeza vetorial, podemos somar os momentos lineares dos pedaços depois da separação:

$$\boxed{p' = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i'}$$

Esta equação pode ainda ser escrita na forma:

$$p' = m \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i'}{m} \Leftrightarrow p' = m\vec{V}' \Leftrightarrow \boxed{\vec{V}' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i'}$$

Assim, o conjunto de pedaços pode ser identificado com um único objeto contendo a massa total m dos pedaços e velocidade $\vec{V}'$. Esta velocidade designa-se por velocidade do centro de massa.

Se as massas não se alterarem no tempo:

$$\boxed{\vec{R}' = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m_i}{m}\right)\vec{r}_i'}$$

A derivada em ordem ao tempo desta posição fornece a velocidade. O ponto associado ao vetor de posição $\vec{R}'$ designa-se por centro de massa do sistema

Se o sistema for contínuo, a velocidade e a posição têm de ser definidos c/ recurso ao conceito de integral. A densidade ρ do sistema será então uma função da posição e um elemento infinitesimal do volume dV (cuja magnitude dependerá em geral também da posição) terá uma massa $dm = \rho(\vec{r})dV$. A posição do centro massa será então dada por:

$$\boxed{R_{CM} = \frac{1}{m}\iiint \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,dV}$$

em que

$$\boxed{m = \iiint_V \rho(\vec{r})\,dV}$$

é a massa total do sistema

...

(após alguns cálculos)

...

Conclui-se que o corpo inicial pode ser substituído por um conjunto de elementos separados representado pelo centro de massa

A ação da força exterior é então a de alterar o movimento do centro de massa da situação inicial para a situação final.

Se não houver forças exteriores o movimento retilíneo e uniforme do centro de massa não se altera durante todo o processo.

Dito de outra forma: o momento linear total do sistema inicial é igual ao momento linear total do sistema. ↳ se $F_{ext} = 0$

Quando força exterior é nula: $\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 0}$

⇓

Princípio da Conservação do momento linear

Nota: A violação do princípio de inércia corresponde a mudar a geometria do espaço. ↳ Relatividade

Note-se contudo que o momento linear de cada parte, tomada individualmente, pode não se conservar uma vez que podem existir forças internas em ação; apenas a soma de todos os momentos se conserva.

Sistemas de massa variável: o foguete

No caso de não existirem forças externas aplicadas, a modificação do estado de movimento de uma parte de um sistema resultante da alteração da sua estrutura interna é determinada pelo comportamento da parte remanescente.

O exemplo clássico é o foguete em ausência de gravidade que perde a massa ejetada das suas turbinas.

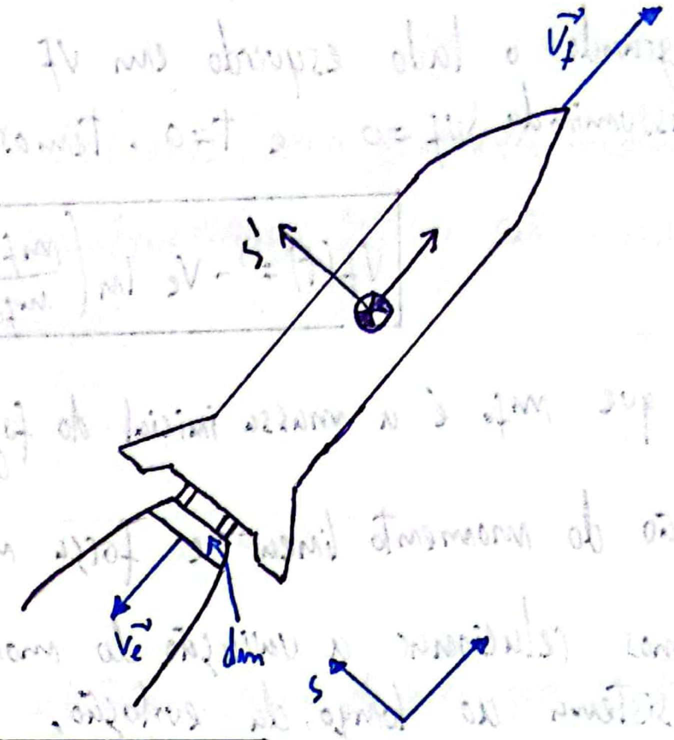
Não havendo nenhuma força exterior a atuar sobre o sistema:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p_f} + \vec{p_e}) = 0}$$

Se considerarmos o foguete ou os gases ejetados separadamente, todavia o seu momento linear não é conservado

· Referencial da Terra

Neste referencial (convenientemente rodado de forma a que um dos eixos coincida com a direção do movimento) o momento linear inicial do sistema no instant t é



$$\boxed{p(ini) = m_f(t)\, v_f(t)}$$

enquanto o momento final é,

$$\boxed{p(fim) = (m_f - dm)(v_f + dv_f) + dm(v_f + dv_f + v_e)}$$

em que v_e é a velocidade dos gases relativamente ao foguete

Como a massa se conserva a massa dos produtos ejetados tem de ser igual à massa perdida pelo foguete, razão porque apenas utilizámos indistintamente dm quer para a perda de massa do foguete, quer para a massa dos gases expelidos.

A variação do momento entre o estado final e o estado inicial é:

$$\boxed{dp = p(fim) - p(ini) = m_f\, dv_f - dm\, v_e}$$

→ desprezando o termo $dm\, dv_f$ por ser de segunda ordem

Mas $dm = dm_e = -dm_f$

o que implica

$$\boxed{dv_f = -v_e \frac{dm_f}{m_f}}$$

Esta é a equação do foguete (ou equação de Tsiolkowsky) na ausência de forças externas

Integrando o lado esquerdo em v_f e o direito em m_f, e assumindo $v_f = 0$ e $t = 0$, temos

$$\boxed{v_f(t) = -v_e \ln\left(\frac{m_f(t)}{m_{f0}}\right)}$$

→ admitindo v_e constante

em que m_{f0} é a massa inicial do foguete

Variação do momento linear e força média

Podemos relacionar a variação do momento linear de um sistema ao longo da evolução,

$$\boxed{d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \vec{F}\,dt}$$

Dito de outra forma,

$$\boxed{\int_{\vec{p}_{ini}}^{\vec{p}_{fim}} d\vec{p} = \int_{t_{ini}}^{t_{fim}} \vec{F}(\tau)\,d\tau}$$

O primeiro termo da equação é $\vec{p}_{fim} - \vec{p}_{ini}$ e logo

$$\boxed{\vec{p}_{fim} - \vec{p}_{ini} = \int_{t_{ini}}^{t_{fim}} \vec{F}(\tau)\,d\tau}$$

→ teorema do Impulso

A equação acima pode ser interpretada da forma

$$\frac{\vec{p}_{fim} - \vec{p}_{ini}}{\delta t} = \frac{\delta \vec{p}}{\delta t} = \vec{F}$$

intervalo de tempo

A variação do momento linear no intervalo δt é igual à força média que age durante esse intervalo de tempo. Esta interpretação permite concluir que as equações mais não são que a reafirmação da 3ª Lei de Newton para as forças médias

Homogeneidade temporal

O tempo, é, tanto quanto sabemos, uma grandeza unidimensional. Isso implica que as duas simetrias mais básicas são a inversão e a homogeneidade no tempo.

inversão: $t \to -t$

homogeneidade: considerar sistemas cujas propriedades não se alteram num dado instante: $t \to t + \varepsilon$

Energia e trabalho

Sendo a quantidade ε arbitrária, daqui decorre que a força toma em cada ponto o mesmo valor em qualquer instante, ou seja não depende do tempo, então

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r})$$

Se fizermos o produto interno de ambos os lados da equação pela velocidade obtém-se:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{\vec{p}}{m} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

C.A.

$$\frac{d|\vec{p}|^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}\cdot\vec{p}) = \vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{p} = 2\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{p}$$

logo, $\frac{1}{2}\frac{d|\vec{p}|^2}{dt} = \vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}$

o que leva a

$$\frac{1}{2m}\frac{d|\vec{p}|^2}{dt} = \vec{F}(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{|\vec{p}|^2}{2m}\right)dt = \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \quad (*)$$

Integrando no tempo entre os instantes inicial t_i e final t_f ao mesmo tempo que integramos ao longo da trajetória C seguida pelo sistema, obtemos:

$$\frac{|\vec{p}(t_f)|^2}{2m} - \frac{|\vec{p}(t_i)|^2}{2m} = \int_C \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} \leftarrow W$$

integral de linha

só p/a forças constantes $\leftarrow W = F\Delta x$

Assim, conclui-se

$$\boxed{K = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}}$$

→ Caso em que a força só depende da posição e não do tempo

é a energia cinética do sistema

A quantidade

W<0, trabalho sobre sistema

W>0, trabalho sobre o exterior

Para realizar o deslocamento ← Medida da eficácia da força

$$\boxed{W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

é o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ ao longo da trajetória C
A variação da energia cinética de um sistema é igual ao trabalho realizado pela força aplicada sobre ele ao longo da trajetória.

Supomhamos agora que, para além da força só depender da posição, ela é da forma

→ Como W é um integral faz-se isto.

$$F(\vec{r}) = \overset{\text{convencional}}{-} \frac{dU(\vec{r})}{d\vec{r}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e_1} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e_2} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e_3}\right)$$

em que $U(\vec{r})$ é uma função unicamente da posição, com dimensão de energia, que dá pelo nome de energia potencial ou simplesmente potencial

↳ energia está armazenada

Quando isto acontece diz-se que a força $\vec{F}$ é conservativa e deriva do potencial $U(\vec{r})$. Assim, a partir de uma equação da pág anterior,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\vec{p}|^2}{2m}\right) = -\frac{dU(\vec{r})}{\cancel{d\vec{r}}}\frac{\cancel{d\vec{r}}}{dt} = -\frac{dU(\vec{r})}{dt} \quad (*)$$

e consequentemente,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(K+U) = 0}$$

Força conservativa
existe uma função tal que a sua derivada dá a força

A grandeza:

$$\boxed{E = K + U}$$

designa a energia mecânica total do sistema e mostra que, caso o tempo seja homogéneo, a energia mecânica total do sistema se conserva.

Este resultado designa-se por Princípio de conservação de energia

A definição de potencial introduzida na página anterior implica que para cada ponto onde força está definida

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

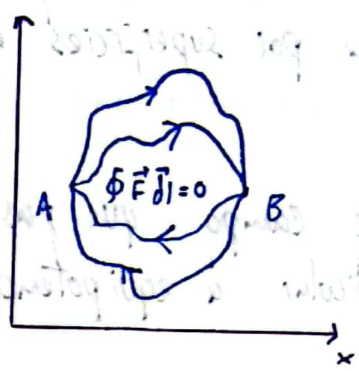
Esta relação quando integrada sobre uma trajetória C entre os pontos inicial P_i e final P_f, dá

$$\int_{P_i}^{P_f} dU = U(P_f) - U(P_i) = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow \text{se o sistema for conservativo}$$

O trabalho total realizado pela força ao longo da trajetória é igual à diferença da função potencial nos extremos dessa trajetória.

Em particular, ao longo de uma trajetória fechada

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \, d\vec{r} = 0}$$



$W_{AB} = U_B - U_A$

$W_{BA} = U_A - U_B$

$W_{AB} = -W_{BA}$

ex F conservativa : Força Gravítica

Considerando uma distribuição de massas. Se a distribuição de massas for discreta, ou seja, se for constituída por um conjunto de elementos distintos, o campo num ponto $\vec{r_0}$ é simplesmente a soma do campo gravítico produzido independentemente por cada um desses elementos.

Se a distribuição for contínua começamos por dividir o volume V onde a massa se encontra distribuída em elementos de volume infinitesimais $dV = dx\,dy\,dz = d^3r$.

O módulo do campo no ponto $\vec{r_0}$ é então dado pela soma (infinita, ou seja, o integral)

$$\boxed{G(\vec{r_0}) = -G\int_V \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^2}\, d^3r}$$

→ aplicado para observar subsolo dos vulcões

onde $\rho(\vec{r})$ é a densidade da distribuição no elemento de volume dV que se encontra na posição $\vec{r}$

O potencial gravítico $U(\vec{r_0})$ associado a essa distribuição de massa é simplesmente

$$U(\vec{r_0}) = G\int_V \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r_0}|}\, d^3r$$

As superfícies sobre as quais a função $U(\vec{r})$ é constante designam-se por superfícies equipotenciais ou simplesmente equipotenciais

A linha de campo que passa por um dado ponto do espaço é perpendicular à equipotencial que passa por esse ponto

caso da terra

Forças não conservativas

As forças cuja estrutura impede a conservação da energia designam-se por forças não conservativas (ex: Força Atrito)

Atrito estático: é o atrito que um corpo, inicialmente em repouso, sente quando uma força crescente que sobre ele atua, o obriga a iniciar um movimento.

Se o corpo inicialmente estava em repouso e a força $\vec{F}$ aplicada não produzia movimento, só podemos deduzir que ela era contrabalançada totalmente pela força de atrito $\vec{F_a}$.

Mas quando a força aplicada excede uma dada magnitude $\vec{F}_{max}$ o equilíbrio rompe-se e o corpo entra em movimento.

Portanto em módulo $F_a \leq F_{max}$ e na situação em que o movimento está prestes a iniciar-se o modelo de Coulomb diz-nos que

módulo força normal

$$\boxed{\vec{F}_{max} = -\mu_0 \, N \, \vec{e}}$$

vetor unitário na direção que o sistema seguiria se a força de atrito não estivesse presente

A constante (adimensional) de proporcionalidade μ_0 designa-se por coeficiente de atrito estático

Nota: O atrito não depende da área de contacto entre o corpo e o meio que o suporta.

Atrito cinético: é o atrito que age quando o movimento já se iniciou, mas o deslizamento é feito a muito baixa velocidade.
Neste caso temos

$$\boxed{\vec{F_a} = -\mu N \vec{e}}$$

em que μ é o coeficiente de atrito cinético e $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{v}$, sendo $\vec{v}$ a velocidade de deslocamento

Para todos os materiais verifica-se, todavia, que $\mu < \mu_0$

O modelo de Coulomb, embora ainda bastante utilizado devido à sua simplicidade, tem limitações. Por exemplo, uma fita adesiva colada numa superfície resiste a trações paralelas à superfície apesar de não existir nenhuma força normal.

Para muito baixas velocidades sabe-se que uma simples relação de proporcionalidade entre a força de atrito e a velocidade é uma boa aproximação

$$\vec{F_a} = -\lambda \vec{v}$$

enquanto que para velocidades mais elevadas o comportamento da força de atrito é melhor descrito por uma relação de proporcionalidade com o quadrado do módulo v da velocidade

$$\vec{F_a} = -\lambda v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$

Rotações e forças

Até este momento concluímos que a imposição da homogeneidade do espaço aos processos físicos implica a conservação do momento linear e que a imposição da homogeneidade temporal implica a conservação da energia.

Agora irá analisar-se o caso da dependência na direção em que o processo físico ocorre.

Consideremos um sistema físico e uma cópia rodada relativamente a ele de um ângulo pequeno $\delta\vec{\varphi}$ arbitrário

A relação geral entre o vetor de posição nos dois sistemas é,

porque não há movimento quando passamos de um para outro

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

O trabalho virtual associado ao deslocamento virtual $\delta\vec{r}$ será designado por δW

Nota: $\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$$

Vamos usar a 2.ª Lei de Newton,

$$\delta W = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \delta\vec{r}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \delta\vec{r}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F} \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r})$$

$$\Leftrightarrow \delta\vec{\varphi} \cdot \left(\vec{r} \times \vec{F} - \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

A quantidade,

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m r^2 \omega$$

$[M][L]^2[t]^{-1}$

designa-se por momento angular, enquanto a quantidade

$$\boxed{\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

se designa por momento da força ou torque associado à força $\vec{F}$. A equação (da pag anterior) diz-nos que a variação do momento angular é igual ao torque:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}}$$

Se durante a evolução do sistema considerado o torque for sempre nulo então a equação anterior implica

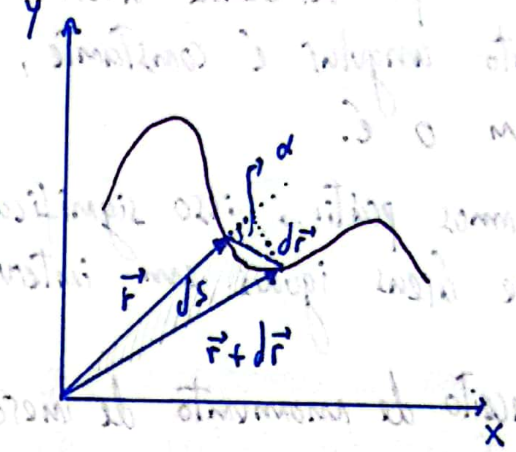
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

ou seja, o momento angular conserva-se no tempo. Este resultado designa-se por Princípio da conservação do momento angular. Conclui-se que a conservação do momento angular é equivalente a afirmar que não há trabalho realizado na rotação.

Forças Centrais e conservação do momento angular

Forças centrais: forças que conservam o momento angular ao longo do tempo. ex: Força gravítica ou força de atração eletroestática entre duas cargas elétricas.

Considerando o vetor de posição $\vec{r}(t)$ num dado instante t e a velocidade $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ tangente à trajetória nesse ponto no mesmo instante.



Então,

$$\vec{r} \times \vec{V} = \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{dt}$$

$d\vec{r}$ → vetor tangente à trajetória correspondente à variação da posição ao longo da trajetória entre os instantes t e $t+dt$

Ora,

$$|\vec{r} \times d\vec{r}| = |\vec{r}||d\vec{r}| \sin \alpha$$

α → ângulo entre $\vec{r}$ e $d\vec{r}$

Vemos que $|\vec{r} \times d\vec{r}|$ é igual ao dobro da área dS do triângulo subentendido por $\vec{r}$ e $d\vec{r}$.

Isso significa que o produto externo pode ser representado pelo elemento orientado de área $d\vec{S} = dS\,\vec{n}$, em que $\vec{n}$ é o vetor normal ao plano definido por $\vec{r}$ e $d\vec{r}$

Sendo assim,

$$\vec{L} = 2m \frac{d\vec{S}}{dt}$$

A quantidade

$$\boxed{\vec{w} = \frac{d\vec{S}}{dt}}$$

designa-se por velocidade areolar e vemos que se o momento angular é constante, então a velocidade areolar também o é.

Em termos práticos isso significa que o vetor de posição $\vec{r}$ cobre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

O conceito de momento de inercia

Comecemos por considerar o caso de uma única partícula realizando um movimento circular uniforme no plano com velocidade angular $\vec{\omega}$. O seu momento angular é,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \vec{L} = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

usando a relação de Lagrange, e sendo $r = |\vec{r}|$ ← $$\Leftrightarrow \vec{L} = m[\vec{\omega} r^2 - \vec{r}\underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\omega})}_{0}]$$

Mas como num movimento circular uniforme $\vec{r}$ e $\vec{\omega}$ são ortogonais, concluímos que

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

onde

$$\boxed{I = mr^2}$$

é o momento de inercia da partícula

Obtemos assim um paralelismo formal entre o momento linear, proporcional à velocidade linear da partícula, e o momento angular, proporcional à sua velocidade angular

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{p} &= m\vec{v} \\ \vec{L} &= I\vec{\omega}\end{aligned}}$$

O conceito de corpo rígido

Um corpo rígido é um sistema que corresponde a um conjunto de partículas cujas distâncias relativas r_{ij} não se alteram com o tempo, o que implica uma estrutura e forma invariante no tempo.

Num corpo deste tipo conclui-se que as forças internas têm de ser perpendiculares ao deslocamento e portanto num corpo rígido as forças internas não realizam trabalho.

Imaginemos um sistema que roda em torno de um ponto fixo. Assim, todas as partículas têm de sofrer exatamente a mesma rotação.

Assim,

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Por sua vez, o momento angular do sistema é dado por

$$\vec{L} = \sum_i m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i m_i\left[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right]$$

onde m_i é a massa da i-ésima partícula.

Usando mais uma vez a relação de Lagrange

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left[\vec{w} r_i^2 - \vec{r_i}(\vec{w} \cdot \vec{r_i})\right]$$

ou em componentes,

$$L_j = \left\{ \sum_i m_i \left[r_i^2 - (\vec{r_i})_j^2\right] \right\} w_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{3} \left[\sum_i m_i (\vec{r_i})_j (\vec{r_i})_k \right] w_k$$

Esta relação pode ser descrita na forma matricial

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Temos então

$$I_{jj} = \sum_i m_i \left[r_i^2 - (\vec{r_i})_j^2\right],$$

$$I_{jk} = -\sum_i m_i (\vec{r_i})_j (r_i)_k \quad (j \neq k)$$

Existe portanto uma relação linear entre o momento angular e a velocidade angular,

$$\boxed{\vec{L} = I \vec{w}}$$

representada pela matriz I com componentes. Esta matriz designa-se por tensor de inercia. O momento de inercia de um corpo é igual ao momento de inercia das suas partes.

→ Os momentos de inércia dependem do referencial escolhido e da origem desse referencial.

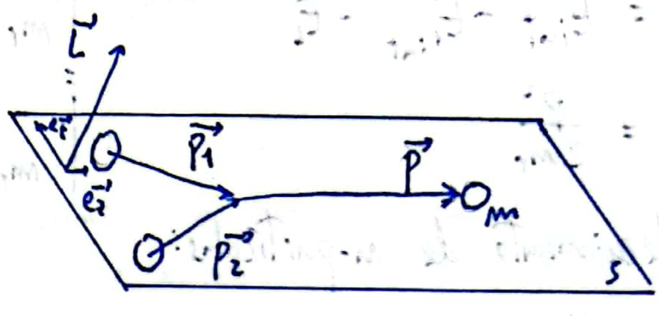
Teorema dos eixos paralelos

O momento de inércia de um sistema em torno de um eixo é igual à soma do momento de inércia em torno de um eixo paralelo passando pelo centro de massa do sistema e do momento de inércia do sistema em torno do eixo original como se a sua massa estivesse toda concentrada no centro de massa

Este teorema torna bem visível, mais uma vez, a similitude com o que se passa para o momento linear ou a energia cinética de sistemas compostos.

Análise de um choque

O sistema mais simples que se pode considerar envolve três partículas, por exemplo duas no estado inicial e uma no estado final. Admitindo que antes da interação as partículas estão livres e que o mesmo à partícula do estado final após a interação.



Como o momento angular se conserva logo os momentos lineares das partículas definem o plano S

$\vec P \perp \vec L$

admitindo conservação da massa: $m = m_1 + m_2$

e não havendo forças exteriores: $\vec P^{(f)} = \vec{p_1}^{(i)} + \vec{p_2}^{(i)}$

$\vec v^{(f)} = \dfrac{\vec{p_1}^{(i)} + \vec{p_2}^{(i)}}{m_1 + m_2} = \vec v_{CM}^{(i)}$, velocidade do centro de massa permanece invariante

Equação de conservação: $\begin{cases} m_1 v_{1z}^{(i)} + m_2 v_{2z}^{(i)} = (m_1 + m_2) v_{CM} \\ m_1 v_{1T}^{(i)} + m_2 v_{2T}^{(i)} = 0 \end{cases}$

① Se este sistema está perfeitamente determinado pelo conhecimento das grandezas físicas no estado inicial, o mesmo não acontece com o sistema recíproco em existe uma partícula de características conhecidas no estado inicial e duas no estado final. (Desintegração)

↓ Desintegração c/ duas partículas no estado final

O processo é igual ao caso anterior da colisão de duas partículas, sendo as duas grandezas a determinar o ângulo θ_{CM} que a direção dos momentos finais faz com um eixo arbitrário e o módulo $p = |\vec{p_1}| = |\vec{p_2}|$

Assim,

$$\boxed{E_{int}^{(i)} = E_{1\,int}^{(f)} + \frac{p^2}{2m_1} + E_{2\,int}^{(f)} + \frac{p^2}{2m_2}}$$

em que E_{int} designa a energia interna, associada a processos estruturais de uma partícula.

As energias internas não se mantêm entre os estados inicial e final,

$$E = E_{int}^{(i)} - E_{1\,int}^{(f)} - E_2^{(f)}$$

$$(=) \; E = \frac{p^2}{2m_r}$$

m_r é a massa reduzida

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

② No caso em que existe um decaimento de n-partículas:

$$\vec{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i}^{(f)}$$

$$E_{int}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} E_{i\,int}^{(f)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{{p_i^{(f)}}^2}{2m_i}$$

Se a partícula selecionada for a partícula 1 e estivermos no sistema em que a partícula inicial está em repouso,

$$\vec{p}_1^{\,(f)} = -\sum_{i=2}^{M} p_i^{(f)} = -\vec{P}$$

$$E_{int}^{(i)} = \frac{P^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m-m_1}\right) + E_{1_{int}}^{(f)} + \xi_{int}$$

energia interna das outras partículas

A energia cinética da partícula 1 é então dada por:

$$E_{1_{cin}}^{(f)} = \frac{m - m_1}{m} Q$$

onde

$$Q = E_{int}^{(i)} - E_{1_{int}}^{(f)} - \xi_{int}$$

O valor máximo da energia cinética da partícula 1 ocorre quando Q é máximo, ou seja, quando ξ_{int} é mínimo

Como

$$\xi_{int} = \sum_{i=2}^{M} E_{i_{int}}^{(f)} + \sum_{i=2}^{M} \frac{p_i^{(f)2}}{2m_i} - \frac{P^2}{2(m-m_1)}$$

isso acontece quando

$$\sum_{i=2}^{M} \frac{p_i^{(f)2}}{2m_i} = \frac{P^2}{2(m-m_1)}$$

sai as outras todas

Esta equação é verdadeira se todas as componentes da "partícula composta" se moverem com velocidades com o mesmo módulo v

Nesse caso,

$$\boxed{\left(E_{1_{cin}}^{(f)}\right)_{max} = \frac{m - m_1}{m}\epsilon}$$

sendo

$$\epsilon = E_{int}^{(i)} - \sum_{i=1}^{M} E_{i_{int}}^{(f)}$$

a energia de integração

Assim, em conclusão

① Numa desintegração com duas partículas no estado final o momento de qualquer destas partículas é completamente determinado pela energia de desintegração ϵ;

② Se houver mais de duas partículas no estado final, a energia cinética de uma delas é uma função (contínuas) dos momentos das outras partículas envolvidas através da quantidade

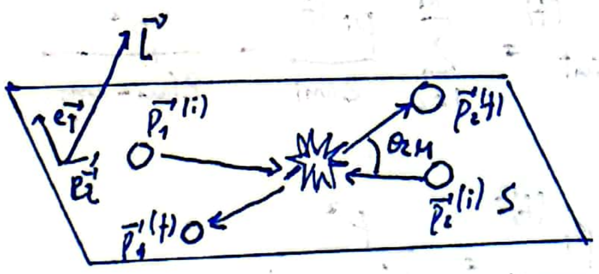
várias partículas → pois existe várias maneiras de distribuir a energia

$$Q = \epsilon - \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{p_i^{(f)^2}}{2m_i} - \frac{p^2}{2(M-m_1)} \right)$$

significa "neutrão pequenino" ou neutrino em italiano ⟶ descoberta do neutrino ⟵ pensava-se que neutrão desintegrava apenas num protão e eletrão, mas afinal existe uma terceira partícula

Pauli ⇓

Situação em que se envolve 4 partículas



havendo conservação do momento linear,

$$p_1^{(i)} + p_2^{(i)} = p_1^{(f)} + p_2^{(f)}$$

ou em componentes,

$$p_{1z}^{(i)} + p_{2z}^{(i)} = p_{1z}^{(f)} + p_{2z}^{(f)}$$

$$p_{1T}^{(i)} + p_{2T}^{(i)} = p_{1T}^{(f)} + p_{2T}^{(f)}$$

Além disso, $p_i = p_f \Rightarrow V_{CM}^{(i)} = V_{CM}^{(f)}$

O ângulo θ_{CM} é dado por

$$\tan\theta_{CM} = \frac{p_{1T}^{(f)}}{p_{1z}^{(f)}}$$

No caso em que a energia interna das partículas se conserva, nesse caso a energia cinética total também se conserva entre o estado inicial e final. (energia cinética → energia interna → energia cinética).

Nesta situação temos um processo designado por choque elástico (é quase como se um corpo embate frontalmente contra uma mola).

O processo é descrito:

$$p_{1z}^{(f)} + p_{2z}^{(f)} = 0$$

$$p_{1T}^{(f)} + p_{2T}^{(f)} = 0$$

$$\frac{p_1^{(i)^2}}{2m_1} + \frac{p_2^{(i)^2}}{2m_2} = \frac{p_1^{(f)^2}}{2m_1} + \frac{p_2^{(f)^2}}{2m_2}$$

No referencial do centro de massa os momentos lineares têm mesma direção

⇓

Módulo do momento linear de cada uma das partículas é o mesmo no estado inicial e no estado final

e as componentes da velocidade são:

$$V_{1z}^{(f)} = V_1 \cos\theta_{CM}$$

$$V_{1T}^{(f)} = V_1 \sin\theta_{CM}$$

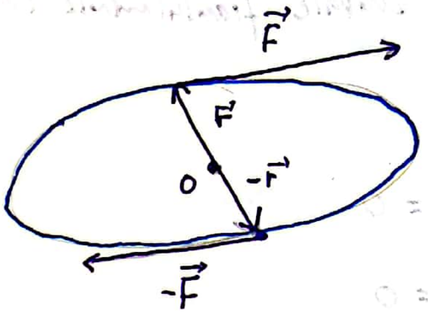
Módulo 5: Oscilações

Consideremos uma partícula, pertencente a um sistema de várias partículas em equilíbrio.
O princípio de Ação-Reação assegura que a soma de todas as forças internas que sobre ela agem tem de se anular.
Assim, para que uma partícula esteja em equilíbrio a soma de todas as forças externas que sobre ela atuam tem de ser zero

$\Downarrow$

condição necessária para que o sistema esteja em equilíbrio mas não suficiente.

exemplo: Binário



→ sistema não está em equilíbrio

Apesar de as forças se anularem existe um movimento de rotação forçado pelas duas forças atuando em sentidos opostos.

Assim, a condição necessária para equilíbrio é que o torque total $\vec{T}$ em relação a O das forças externas seja nulo,

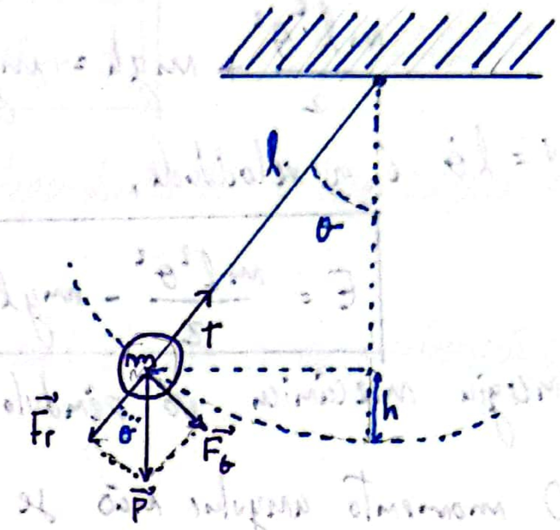
$$\vec{T} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{F_i} = 0$$

Portanto, para um sistema estar em equilíbrio, as seguintes condições gerais têm de se verificar,

$$\boxed{\begin{aligned} \sum \vec{F} &= 0 \\ \sum \vec{T} &= 0 \end{aligned}}$$

O pêndulo Simples

- Começa-se por decompor o peso nas suas componentes radial $\vec{F_r}$ e angular $\vec{F_\theta}$.



$F_\theta = \vec{P} \sin\theta$

- A componente radial tem de compensar exatamente a Tensão pois de outro modo o fio teria de esticar ou encolher

Assim, temos, $m l \ddot{\theta} = -mg \sin\theta$, em que l é o comprimento do fio.

De outra forma, $\ddot{\theta} = -w^2 \sin\theta$

com $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$

fazendo $\dot{\theta}\ddot{\theta} = -w^2 \dot{\theta} \sin\theta$

- usando a identidade

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = 2\dot{\theta}\ddot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - w^2\cos\theta\right] = 0$$

integrando

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - w^2 \cos\theta = C \quad (3)$$

↳ uma constante

- Se definirmos o ponto 0 da energia potencial com o que corresponde à posição $\theta = 0$, temos,

$$h = l(1-\cos\theta) \quad , \quad h_0 = l(1-\cos\theta_0)$$

escrevendo a equação da energia:

$$\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgh = mgh_0$$

Como $v = l\dot{\theta}$ é a velocidade,

$$\boxed{E = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl\cos\theta}$$

é a energia mecânica do pêndulo escrita em coordenadas angulares.

<u>Nota</u>: O momento angular não se conserva no caso do pêndulo simples.

A partir da equação 3 da página anterior,

$$\dot{\theta}^2 = 2w^2(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

usando a igualdade trigonométrica:

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = 2\left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad w\,dt = \frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad wt = \int_0^{\phi} \frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

Para obter a solução entre $\theta = 0$ para $t = 0$ e $\theta = \phi$ no instante t.

$\to$ equação integral

$\Downarrow$

Não se sabe resolver analiticamente

$\Downarrow$

Resolve-se <u>por computador</u>
- $\to$ Método de Euler
- $\to$ Método de Euler-Cromer

$\Downarrow$

é possível resolver a equação $\to$ regime de pequenas oscilações

$\Downarrow$

se $\theta_0 \to 0$ a equação do movimento reduz-se a

$$\boxed{\ddot{\theta} = -w^2\theta}$$, descreve o oscilador harmónico

É solúvel analiticamente. A forma mais geral é:

$$\boxed{\theta(t) = A \sin(\omega t + \phi)}$$

com A e ϕ constantes mas dependentes dos valores iniciais escolhidos para o movimento em causa

$\underline{\theta_0}$: depende apenas do comprimento do fio e da aceleração da gravidade

Sendo a energia potencial,

$$U(\theta) = -mgl\cos\theta$$

e sendo a energia cinética $K(\theta, \dot{\theta})$

$$K(\theta, \dot{\theta}) = E - U(\theta) = E + mgl\cos\theta \geq 0$$

Usando a conservação da energia pode-se ir mais longe

Como cosseno toma valores no intervalo $[-1, 1]$

$$-\cos\theta \leq \frac{E}{mgl}$$

Se $\underline{E > mgl}$, o ângulo θ pode tomar qualquer valor

É o que acontece quando a massa m é lançada com uma velocidade inicial tão grande que ultrapassa a posição na vertical acima do ponto de sustentação

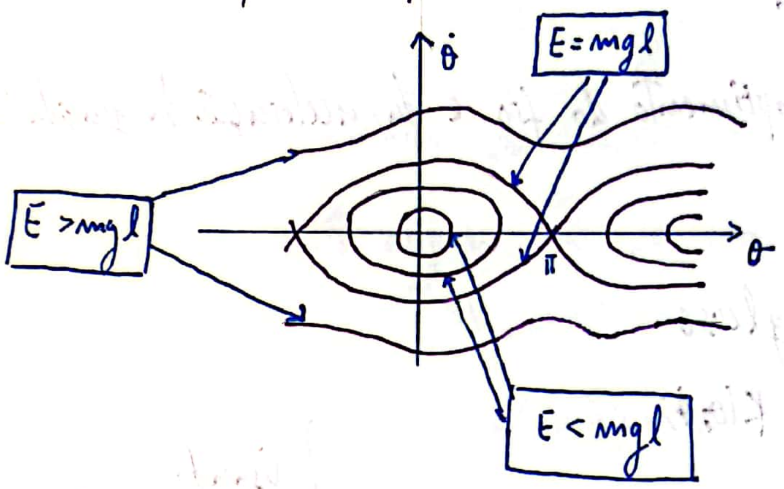
Se $\underline{E < mgl}$, o ângulo θ está limitado ao intervalo $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ definido por

$$-\frac{E}{mgl} \leq \cos\theta \leq \frac{E}{mgl}$$

Se usarmos a equação de conservação de energia na forma

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}\left(\frac{E}{mgl} + \cos\theta\right)}$$

temos o espaço de fases



Se $E \gg mgl$ o termo $\cos\theta$ não tem quase influência na raiz e por isso $\dot{\theta}$ é independente de θ.

$E \approx mgl \rightarrow \dot{\theta} \approx \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{1+\cos\theta} \iff \dot{\theta} \simeq 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

↳ Neste caso, o pêndulo parte de um ponto próximo da vertical acima do ponto de sustensão e aí volta após uma oscilação completa.

Se $E \ll mgl$, nesse caso o desenvolvimento em série de Taylor em torno de $\theta = 0$ permite escrever

$$\cos(\theta) \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

das equações atrás sabíamos que $E = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl\cos\theta$

$$\iff E \approx \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 - mgl$$

ou ainda

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 \approx \xi$$

onde $\xi = E + mgl$ é uma constante devido à conservação da energia

$\Rightarrow$ Esta equação define uma elipse no espaço de fases

Sistema genérico

$K = E - U$, O movimento só pode existir se $\boxed{E \geq U}$!!!

Nota: pontos de inversão da trajetória : pontos em que a velocidade do sistema se anula

- Se $E > U_{máx}$, K não se anula e não existem pontos de inversão

↓

o sistema nunca pára

- Se $E < U_{máx}$, o sistema pode se deslocar através do ponto de inversão e inverte o movimento na direção oposta à normal

- Se $E = U_{máx}$, o sistema inverte o movimento no ponto correspondente ao máximo qualquer que seja a direção original do movimento

→ O mínimo é um ponto de equilíbrio estável
→ O máximo é um ponto de equilíbrio instável

Sinal da segunda derivada do potencial no ponto extremo:

→ Este sinal indica como a força correspondente se comporta na vizinhança desse ponto.

1) se for positiva o sistema volta ao ponto de extremo é estável
2) se for negativa o sistema vai afastar-se do ponto extremo e é instável

Equilíbrio indiferente

- O ponto de equilíbrio é muito grande e o sistema encontra-se em equilíbrio, ficando parado em qualquer posição em que seja deixado

Equilíbrio metaestável

- O constrangimento leva a uma situação de equilíbrio estável para pequenas oscilações em torno de $\theta = \pi$ → caso do pendulo

- A energia é uma função que tem um mínimo valores pequenos em torno de $\theta = \pi$, mas para grandes valores aparece como tendo um máximo.

DF DEPARTAMENTO DE FÍSICA TÉCNICO LISBOA

FORMULÁRIO PARA MECÂNICA E ONDAS
LMAC e MEBiom, Campus da Alameda - IST
Responsável: Prof. Ana M. Mourão
2019/2020

Mecânica

$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$

$x(t) = x_o + v_{o,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad , \qquad v_x(t) = v_{o,x} + a_x t \quad , \quad v_x^2 = v_{o,x}^2 + 2a_x(x - x_o)$

$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}, \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$

$v_t = \omega R \quad , \quad \vec{v_t} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad \vec{a_c} = -\frac{v_t^2}{R}\vec{e_r} = -\omega^2 R\,\vec{e_r} \;, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$\sum \vec{F_i} = \vec{F_R} = m\vec{a} \quad , \qquad W_F = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\vec{F}_G(R) = -G_N \frac{M\,m}{R^2}\vec{e}_r \;, \quad \vec{F_g} = m\,\vec{g} \;, \quad \vec{F}_E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 q_2}{R^2}\vec{e}_r \;, \quad \vec{F_B} = q\,\vec{v} \times \vec{B} \quad , \quad \vec{F_k} = -k\,x\,\vec{e}_x$

$F_A = \mu\,N$

$E_m = E_c + E_p, \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad E_p(R) = -\frac{G_N M\,m}{R} \;, \quad E_p(h) = mgh \qquad E_{p,k} = \frac{1}{2}k\,x^2$

$\vec{F} = -grad\,E_P = -\nabla E_P$

$v_1^* = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \quad$ e $\quad v_2^* = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \qquad \vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \quad \vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{\sum_i m_i}$

$\vec{L} = \vec{r_i} \times \vec{P_i} \;, \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$

$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau_i} \quad , \quad \vec{\tau_i} = \vec{r_i} \times \vec{F_i} \quad , \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad , \quad \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$I = \sum_i m_i r_i^2 \;, \quad I = \int_V \rho r^2 dV \;, \quad I_{anel} = mr^2 \;, \quad I_{disco} = \frac{1}{2}mr^2$

$E_{c,t} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \;, \quad E_{c,rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$