FORMULÁRIO:

$\sigma = \frac{P}{A}$ $\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ $\tau_{média} = \frac{V}{A}$ $\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta A}$ $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$\sigma_{esmagamento} = \frac{F}{A_{projectada}}$ $\sigma = \frac{P}{A_0} cos^2 \theta$ $\tau = \frac{P}{A_0} cos\,\theta\, sin\,\theta$

$\varepsilon = \frac{d\delta}{dx}$ $\sigma = E\varepsilon$ $\varepsilon_T = \alpha \Delta T$ $\delta_T = L \cdot \alpha \cdot \Delta T$

$\delta = \frac{PL}{AE}$ $\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$ $\delta = \int_0^L \frac{P}{AE} dx$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$ $\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$ $\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$

$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$ $\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$ $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$ $\tau = \frac{T\rho}{J}$

$\phi = \frac{TL}{JG}$ $\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$ $\phi = \int_0^L \frac{T}{JG} dx$

$\phi_B r_B = \phi_A r_A$ $\frac{T_B}{r_B} = \frac{T_A}{r_A}$ $P = T\omega$ $\omega = 2\pi f$

$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ $\frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho}$ $\sigma_x = -\frac{My}{I}$ $\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$

$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$ $\tan\phi = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$

$\sigma_{\max} = K\frac{P}{A}$ $\tau_{\max} = K\frac{Tc}{J}$ $\sigma_{\max} = K\frac{Mc}{I}$

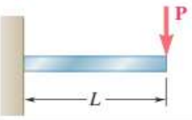
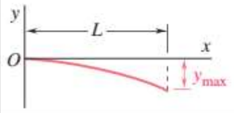
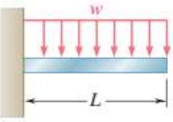
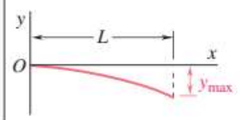
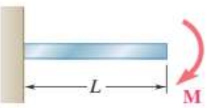
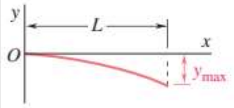
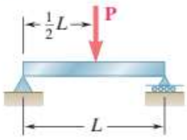
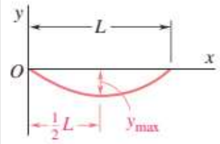
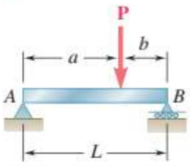
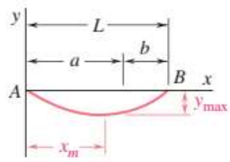
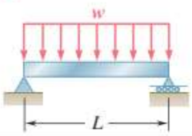
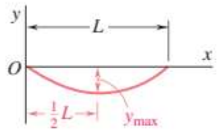
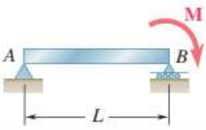
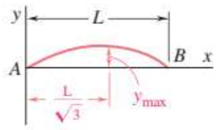
$q = \frac{VQ}{I}$ $\tau = \frac{VQ}{It}$ $Q = A^* \bar{y}$ ou $Q = A^* \bar{z}$ $\tau = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$

$e = \frac{Fh}{V}$ $F = \int_0^b q\,ds$

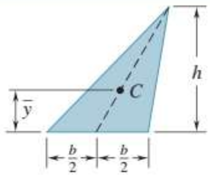
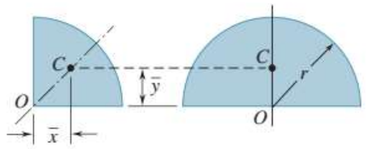
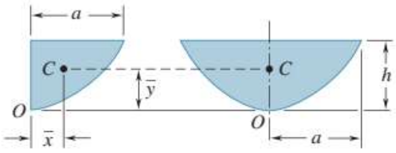
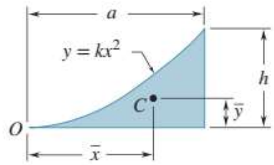
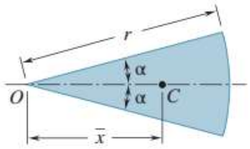
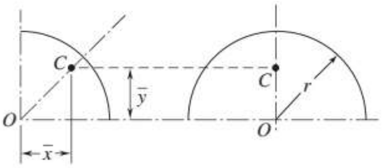
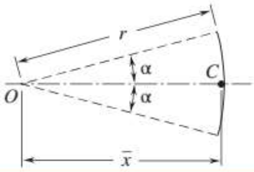
$\frac{dV}{dx} = -w(x)$ $\frac{dM}{dx} = V$ $\frac{d^2M}{dx^2} = -w(x)$

$V_D - V_c = -\int_{x_C}^{x_D} w\,dx$ $M_D - M_c = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx$

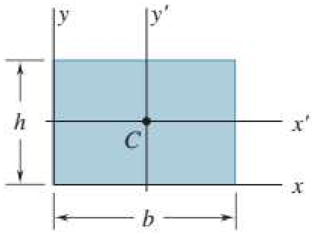
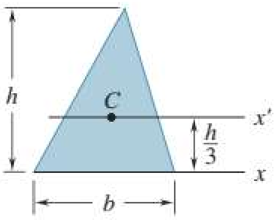
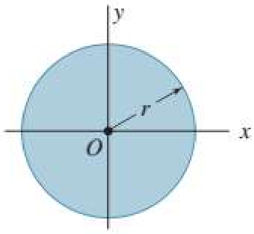
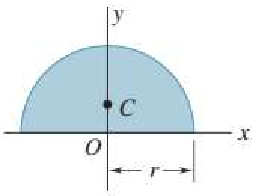
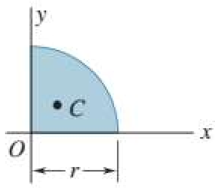
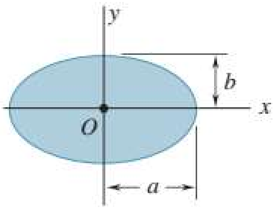
$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI}$ $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$ $EI\frac{d^4y}{dx^4} = -w(x)$

Beam and Loading	Elastic Curve	Maximum Deflection	Slope at End	Equation of Elastic Curve
1 		$-\dfrac{PL^3}{3EI}$	$-\dfrac{PL^2}{2EI}$	$y = \dfrac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
2 		$-\dfrac{wL^4}{8EI}$	$-\dfrac{wL^3}{6EI}$	$y = -\dfrac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
3 		$-\dfrac{ML^2}{2EI}$	$-\dfrac{ML}{EI}$	$y = -\dfrac{M}{2EI}x^2$
4 		$-\dfrac{PL^3}{48EI}$	$\pm\dfrac{PL^2}{16EI}$	For $x \le \frac{1}{2}L$: $y = \dfrac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$
5 		For $a > b$: $-\dfrac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ at $x_m = \sqrt{\dfrac{L^2 - b^2}{3}}$	$\theta_A = -\dfrac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$ $\theta_B = +\dfrac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$	For $x < a$: $y = \dfrac{Pb}{6EIL}[x^3 - (L^2 - b^2)x]$ For $x = a$: $y = -\dfrac{Pa^2b^2}{3EIL}$
6 		$-\dfrac{5wL^4}{384EI}$	$\pm\dfrac{wL^3}{24EI}$	$y = -\dfrac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$
7 		$\dfrac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A = +\dfrac{ML}{6EI}$ $\theta_B = -\dfrac{ML}{3EI}$	$y = -\dfrac{M}{6EIL}(x^3 - L^2x)$

Centroids of Common Shapes of Areas and Lines

Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Parabolic spandrel		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Circular sector		$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Quarter-circular arc		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircular arc		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arc of circle		$\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

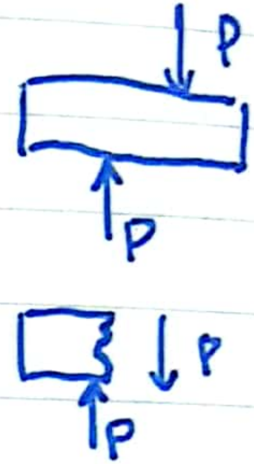
Moments of Inertia of Common Geometric Shapes

Rectangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Circle		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicircle		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Quarter circle		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Ellipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

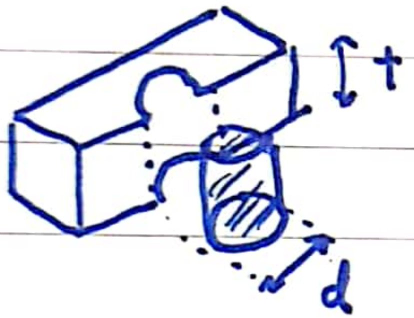
Tensão de corte média e tensão de esmagamento

$$\tau_{média} = \frac{P}{A}$$

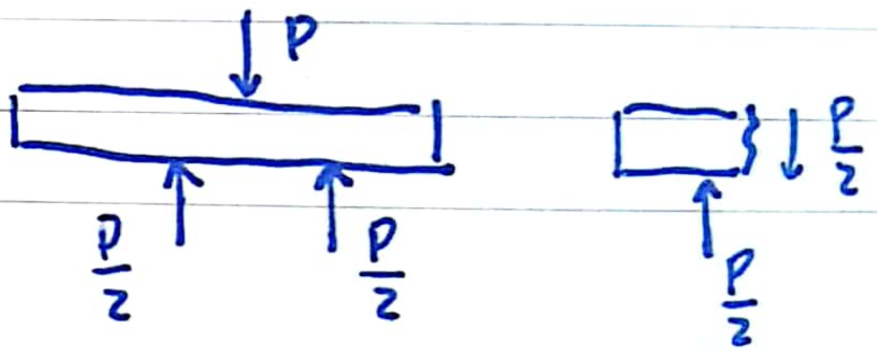
corte simples: $\tau_{média} = \frac{F}{A}$



tensão esmagamento $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{F_{pino}}{td}$



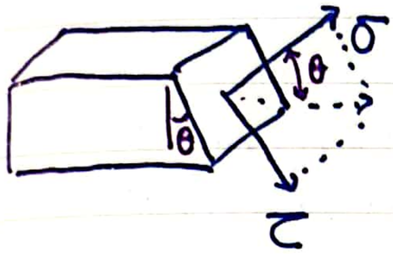
corte duplo: $\tau_{média} = \frac{\frac{F}{2}}{A} = \frac{F}{2A}$



Tensões em plano oblíquo e carga axial

Se $\theta = 0$, tensão normal é máxima:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_0}$$



$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}\sin\theta\cos\theta$$

$$A_\theta = \frac{A_0}{\cos\theta}$$

Falha Primária

Frágeis

falha de tensão é primária

↓

ocorre quando $\theta = 0$

⇓

$\sigma = máx$
$\tau = 0$

Dúcteis

falha de corte é primária

↓

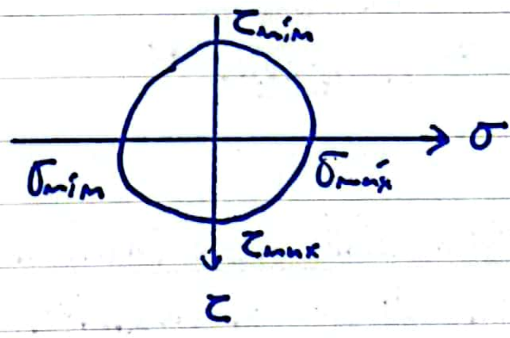
ocorre quando $\theta = \frac{\pi}{4}$

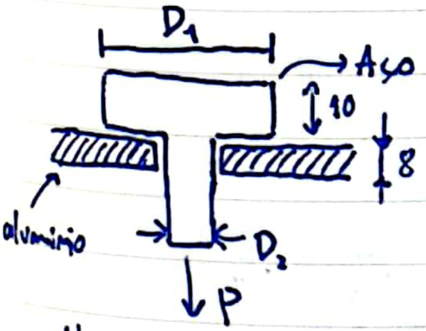
⇓

$\sigma = 0$
$\tau = máx$

Se $\theta = 45°$ a tensão de corte é máxima:

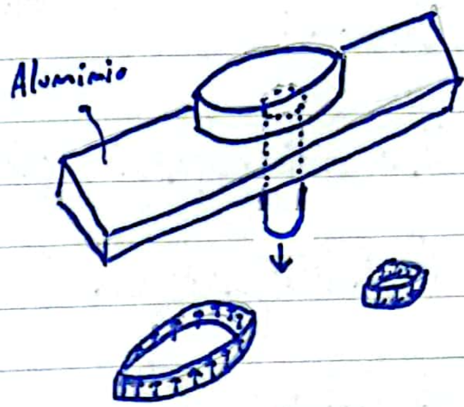
$$\tau_{max} = \frac{P}{2A_0}$$





$$\tau_{aço} = \frac{P}{\pi D_2 10}$$

$$\tau_{alu} = \frac{P}{\pi D_1 8}$$



Alumínio sofre corte da área do aço
Aço sofre corte de área de alumínio

Coeficiente de segurança:

$$FS = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}} = \frac{\text{tensão máxima}}{\text{tensão admissível}}$$

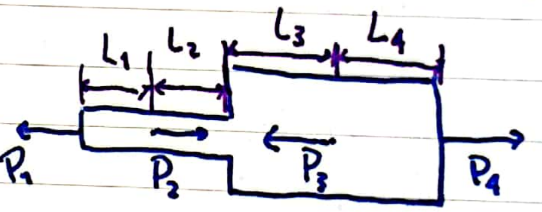
Princípio da Sobreposição

Quando cargas multiplas atuam num material elástico, a deformação resultante é igual à soma das deformações individuais causadas por cada carga.

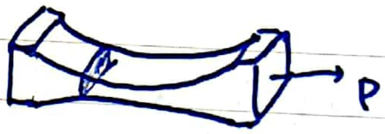
$$\sigma = E\varepsilon \iff \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \frac{PL}{AE}$$

Normal

$$\boxed{\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}}$$

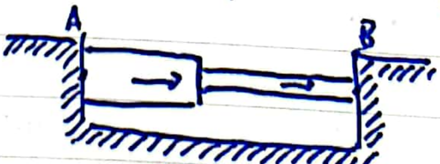


$$\hookrightarrow \delta = \int_0^L \frac{P(x)}{A(x)E(x)}\,dx$$



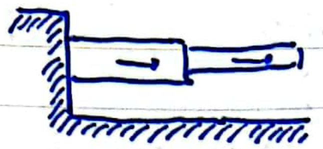
Estrutura estaticamente indeterminada: Quando uma estrutura tem mais suportes do que os necessários para o equilíbrio

Exemplo:

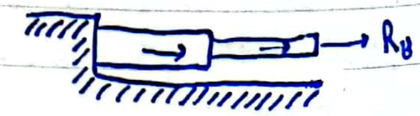


Usar metosobreposição para obter R_A e R_B

1. Retirar apoio em B e calcular $\delta_B^{①}$

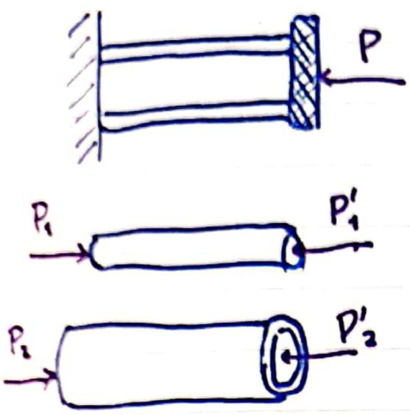


2. Calcular $\delta_B^{②}$ causado pela reação em B



3. $\delta_B^{①} + \delta_B^{②} = 0$, chegar a R_B

Problema dos materiais paralelos



$$\begin{cases} P = P_1 + P_2 \\ \delta_1 = \delta_2 \end{cases}$$

Nota: se tiverem temperatura $\delta_{T_1} + \delta_{P_1} = \delta_{\Delta T_2} + \delta_{P_2}$

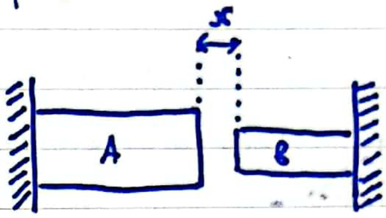
Se $\alpha_1 > \alpha_2$

compressão ⟵ ⟶ tração

Variações térmicas:

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T$$

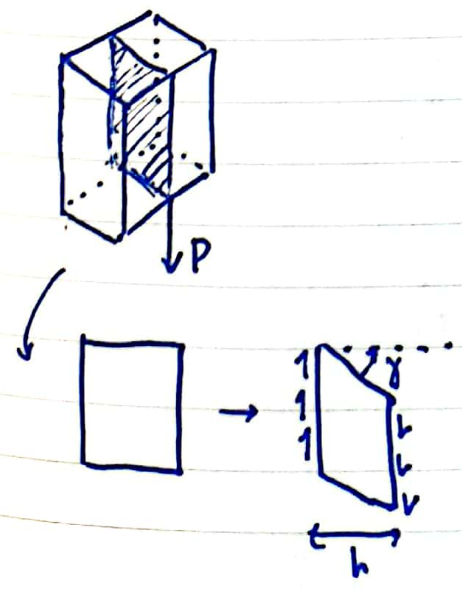
$$\boxed{\delta_T = L \cdot \alpha \cdot \Delta T}$$



Se $\delta_{T(A)} + \delta_{T(B)} > x$ logo irão aparecer deslocamentos provocados por forças

$$x = \delta_{T(A)} + \delta_{P(A)} + \delta_{T(B)} + \delta_{P(B)}$$

Distorções de corte



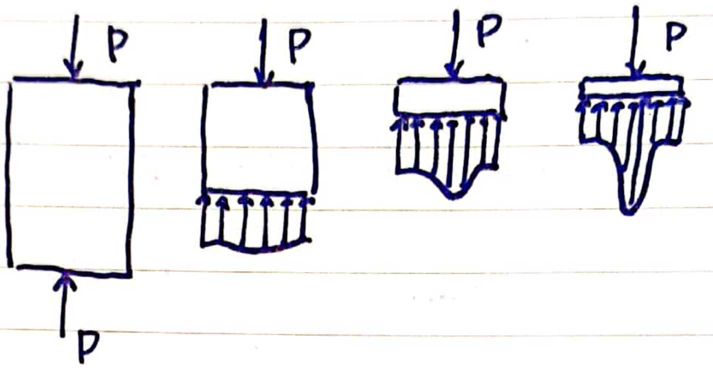
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

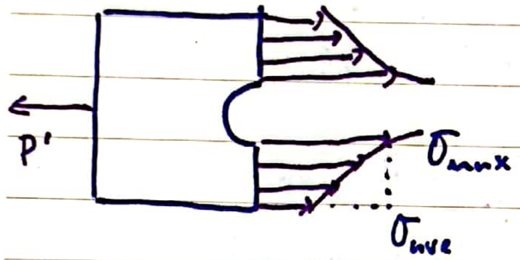
$$\tau_{media} = \frac{P}{A_{corte}} = G\gamma$$

sendo G, o *módulo de corte*

Princípio de Saint-Venant's

A distribuição das tensões é independente do ponto de aplicação da carga excepto na proximidade do ponto de aplicação





Distribuição de tensões num furo circular

fatos concentração tensões: $K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{medio}}$

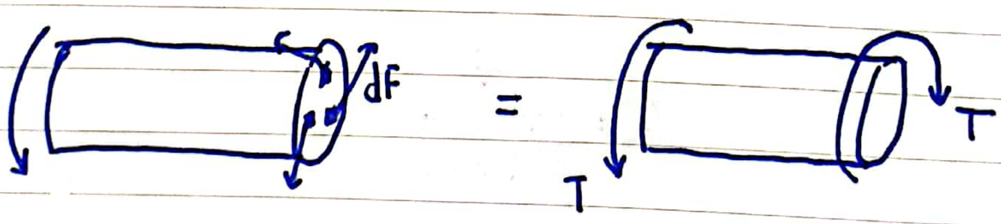
① Calcular $\frac{D}{d}$ e $\frac{r}{d}$

② Ver o K no gráfico

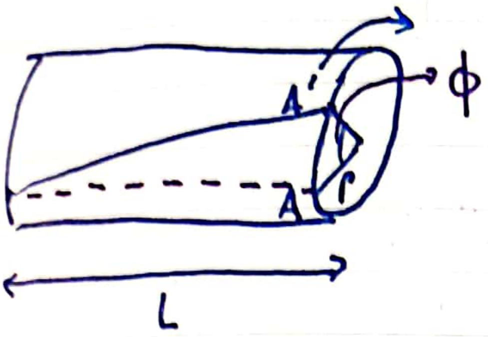
③ Calcular σ_{ave}

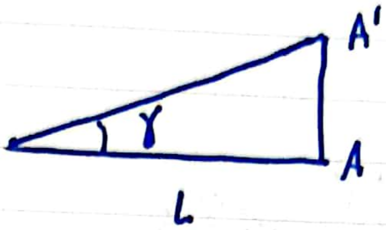
④ $P = A\,\sigma_{ave}$, chegar a P

Torção:



$$T = \int \rho \, dF = \int \rho \, (\tau \, dA)$$





$\tan\gamma \simeq \gamma$

$AA' = \phi\rho$

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad e \quad \gamma_{máx} = \frac{c\phi}{L}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma = \frac{\gamma_{max}\,\rho}{c}$$

$$\Leftrightarrow G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{máx}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{max}} \quad (1)$$

$\tau = G\gamma$ (Lei Hooke)

Usando (1):

$$T = \int \rho\, \tau\, dA$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\tau_{max}}{c}\int \rho^2\, dA$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\tau_{max}}{c} J$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau_{max} = \frac{Tc}{J}}$$

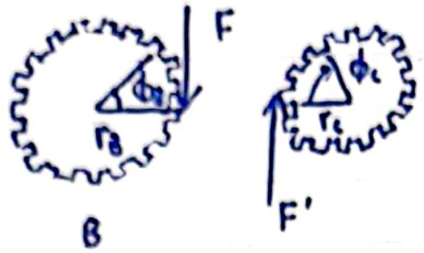
Usando $\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L}$ e $\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$, obtém-se

$$\boxed{\phi = \frac{TL}{JG}} \rightarrow \phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x)\,G(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{m} \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

rotação

<u>Nota</u>: São os pontos mais exteriores que resistem à maior parte da torção. Daí se normalmente usarem tubos ocos.

Engrenagens:



$$T_B = F \cdot r_B$$

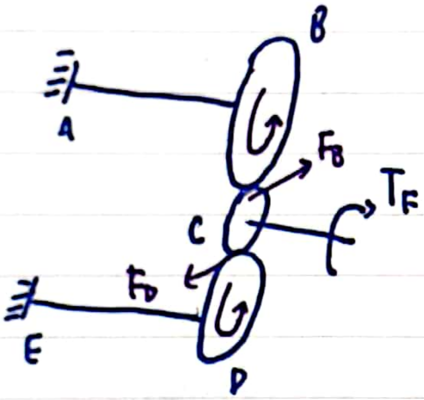
$$T_c = F' \cdot r_c$$

$$F = F' \Rightarrow \boxed{\frac{T_B}{r_B} = \frac{T_c}{r_c}}$$

$$\boxed{\phi_B \, r_B = \phi_c \, r_c}$$

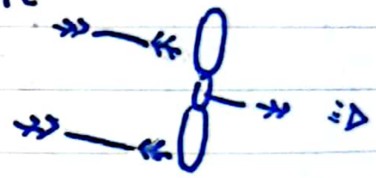
⇒ As engrenagens invertem o sentido da rotação

exemplo:



$$T_F = F_D \cdot r_c + F_B \, r_c$$

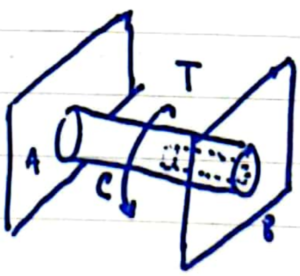
$$= \frac{T_D}{r_D} \cdot r_c + \frac{T_B}{r_B} \, r_c$$

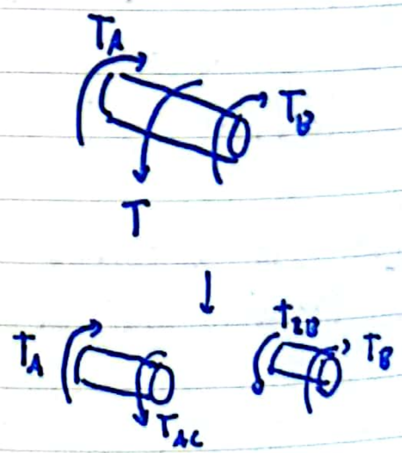


$$\phi_{AB} = \phi_{ED}$$

Veios estaticamente indeterminados

$$T_A + T_B = T$$

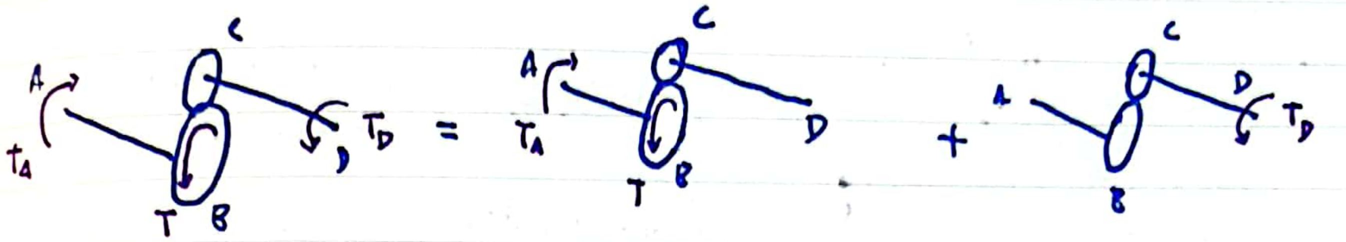




$$\phi_{AB} = \phi_{AC} + \phi_{CB}$$

$$= \frac{T_A L_{AC}}{J_{AC} G_{AC}} - \frac{(T_A - T) L_{CB}}{J_{CB} G_{CB}} = 0 \Rightarrow \phi_{AC} = \phi_{CB}$$

exemplo usando método da sobreposição:



$$\phi_D^{①} + \phi_D^{②} = 0$$

$$\phi_{AD} = \frac{r_B}{r_C}\phi_{AB} + \cancel{\phi_{CD}}^{\,0} \qquad \phi_{AD} = \frac{r_B}{r_C}\phi_{AB} + \phi_{CD}$$

$$\phi_D^{①} = \frac{r_B}{r_C}\phi_{AB} \qquad \phi_D^{②} = \frac{r_B}{r_C}\phi_{AB} + \phi_{CD}$$

Projeção de veios:

$$P = T\omega = 2\pi f T$$

potência (P) — velocidade de rotação (ω)

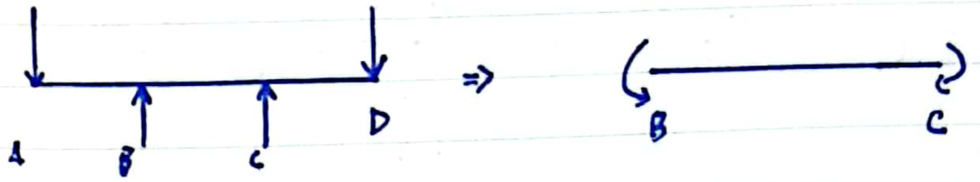
Determinar o binário aplicado no veio para a potência e velocidade de rotação

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

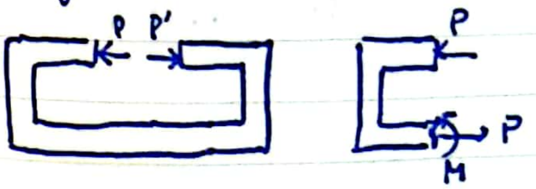
Encontrar a secção transversal que não excede a tensão de corte admissível

Flexão:

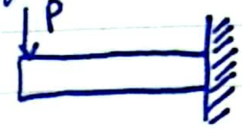
Flexão Pura: Membros prismáticos sujeitos a momentos iguais e opostos atuando no plano longitudinal



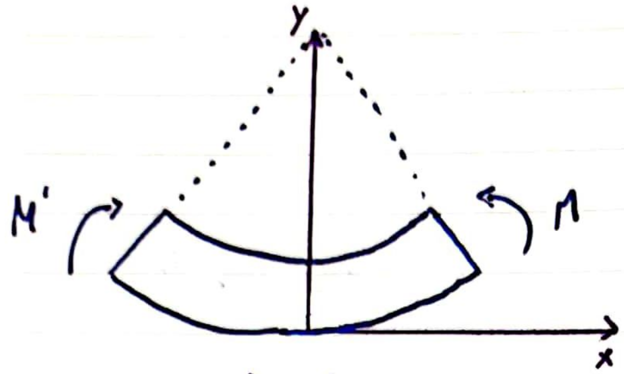
- Carregamento excêntrico



- Carregamento transversal



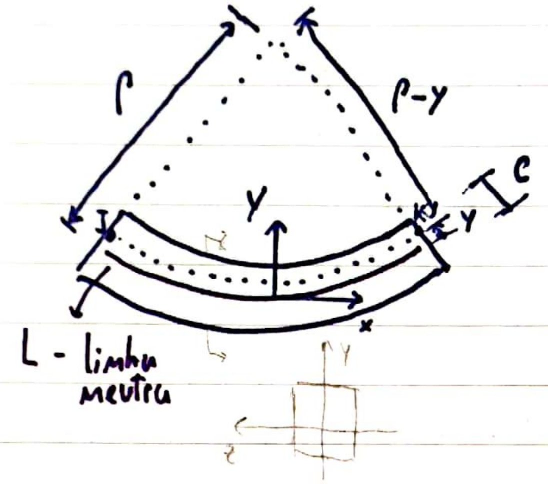
cargas transversais



tensão negativa (acima sup. neutra) → **Compressão**

Superfície neutra → Comprimento da linha não se altera

tensão positiva (abaixo sup. neutra) → **tração**



$$L = \rho\theta \text{ , em JK} \quad L' = (\rho - y)\theta$$

$$\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

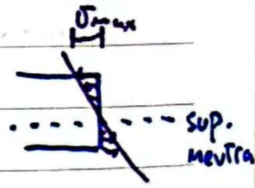
$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

Para $y = c$:

$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_x = -\frac{y}{c}\varepsilon_{max}}$$

explicação da tensão variar linearmente

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{y}{c}E\varepsilon_{max} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_{max}}$$



$$F_x = \int \sigma_x \, dA = -\frac{\sigma_m}{c}\int y \, dA = 0$$

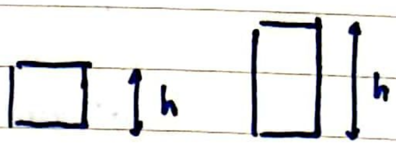
O primeiro momento é nulo (na L.N.)

$$\boxed{\sigma_{x_{máx}} = \frac{Mc}{I}}$$

$$M = \int(-y\sigma_x \, dA) = \frac{\sigma_m}{c}\int y^2 \, dA = \frac{\sigma_m I}{c} \Rightarrow M = \frac{\sigma_m I}{c}$$

$$\boxed{S = \frac{I}{c}}$$

Módulo elástico da secção



⇒ Para áreas iguais é + resistente à flexão o que tiver maior h

$\frac{1}{\rho} \rightarrow$ curvatura

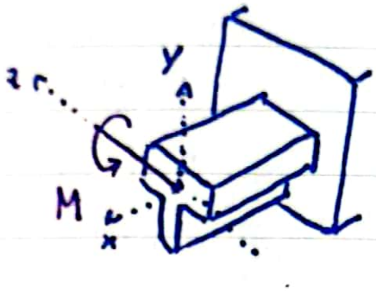
$\rho \rightarrow$ raio de curvatura

$$\left.\begin{aligned} \sigma_m &= E\,\varepsilon_m \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{\varepsilon_m}{c} \end{aligned}\right\} \frac{c}{\rho} = \frac{\sigma_m}{E}$$

$$\Downarrow$$

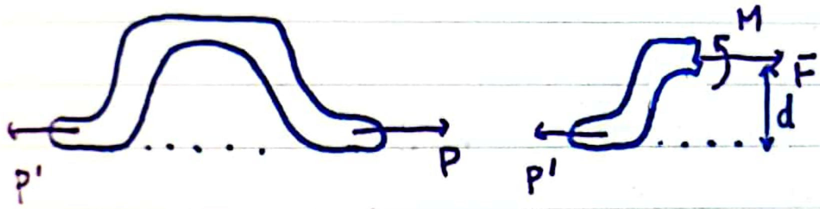
$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

Nota:

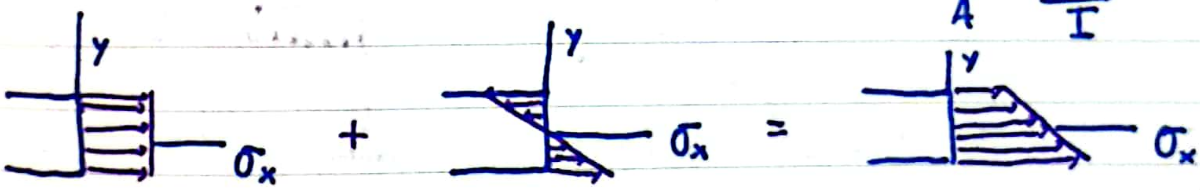


aqui costuma ser o eixo z com direção oposta

Flexão descentrada:



$$\sigma_x = (\sigma_x)_{axial} + (\sigma_x)_{flexão}$$
$$= \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$



Distribuição das tensões em carregamento excêntrico
(só é válido se as tensões não afetarem a geometria inicial da peça)

Flexão não-simétrica:

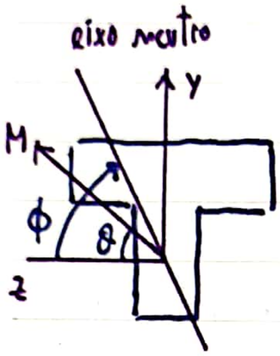
$$M_z = M\cos\theta \qquad M_y = M\sin\theta$$

Sobrepor as duas e caso haja força axial:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z\,y}{I_z} + \frac{M_y\,z}{I_y}}$$

Chegar ao eixo neutro : $\sigma_x = 0$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$



$$\Leftrightarrow \tan\phi = \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \cdot \tan\theta$$

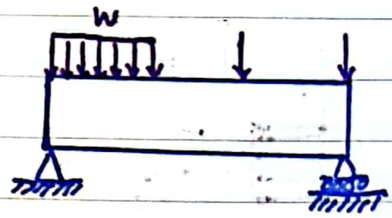
angulo entre z e o eixo neutro

angulo entre z e o momento M

$$\boxed{\tan\phi = \frac{I_z}{I_y} \tan\theta}$$

Analise de vigas à flexão

Vigas - membros estruturais que suportam cargas em vários pontos ao longo do comprimento



Variação tensão corte

$$\boxed{V_2 - V_1 = -\int_{x_1}^{x_2} w \, dx}$$

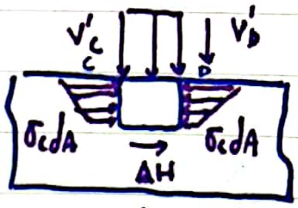
Variação Momento transverso

$$\boxed{M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V \, dx}$$

$V(x) = \int w(x)$

$M(x) = \int V(x)$

Tensão de corte em vigas :



$$\sum F_x = 0 = -\Delta H + \int_A (\sigma_D - \sigma_C) \, dA$$

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I} \underbrace{\int_A y \, dA}_{Q}$$

pensar nas placas de madeira que deslizam sem cola mas com cola não (cria-se tensão de corte horizontal)

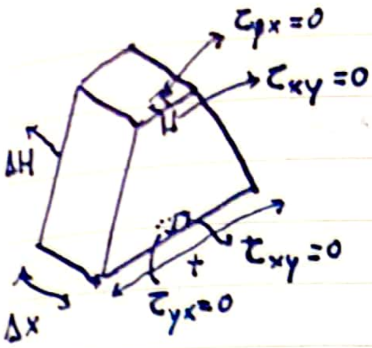
$$M_D - M_C = \frac{dM}{dx} \Delta x = V \Delta x$$

$$\boxed{q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I}}$$

1.º momento da area acima

fluxo de corte

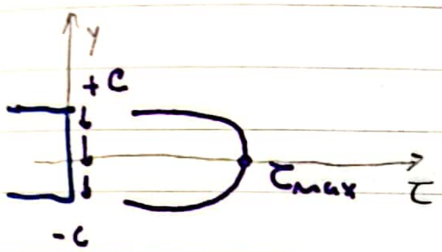
ΔH - é uma força interna



⇒ Enquanto largura "pequena" relativamente à altura, tensões de corte variam pouco relativamente a t.

$$\tau_{media} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{q\,\Delta x}{\Delta A} = \frac{VQ}{I}\frac{\Delta x}{t\Delta x} \Rightarrow \boxed{\tau_{media} = \frac{VQ}{It}}$$

<u>tensão de corte média</u>



As tensões são pequenas nas abas ($t\uparrow\uparrow$) e elevadas na alma ($t\downarrow\downarrow$)

No caso de uma secção retangular:

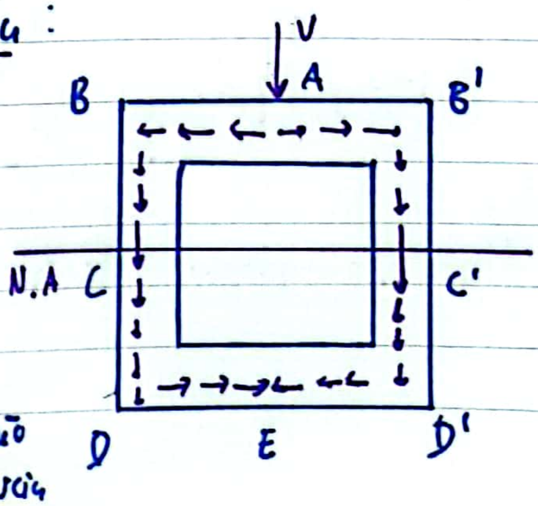
$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)} \qquad \boxed{\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}}$$

Para vigas de secção I:

$$\boxed{\tau_{media} = \frac{VQ}{It}} \qquad \boxed{\tau_{max} = \frac{V}{A_{web}}}$$

⇒ Os efeitos da forma de aplicação de carga são insignificantes exceto nas imediações dos pontos de aplicação dessas mesmas cargas

<u>Tensões de corte em vigas de parede fina</u>:



$$F_z = \int \tau_{xz}\,dA = F_{AB} + F_{AB'} + F_{ED} + F_{ED'} = 0$$

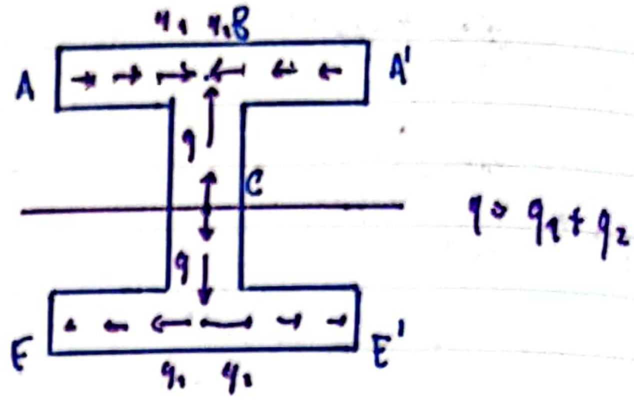
$$F_y = \int \tau_{xy}\,dA = -(F_{BCD} + F_{B'C'D'}) = -V$$

A variação do fluxo de corte ao longo da secção só depende da variação do 1.º momento de inércia

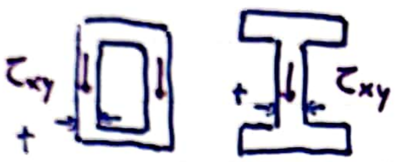
Numa viga em I :

$F_y = -V$

$F_z = 0$



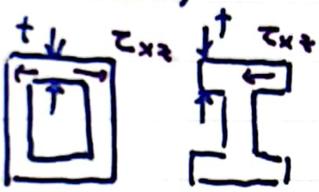
Nota importante:



$\tau_{xy} \simeq 0$, porque nas faces sup e inf $\tau_{xy} = 0$ e "Q" será pequeno e "t" grande logo podem desprezar-se

(Nas abas)

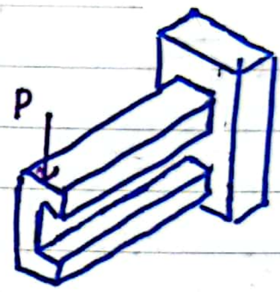
Além disso,



$\tau_{xz} \simeq 0$ na alma pelos mesmos motivos

(Na alma)

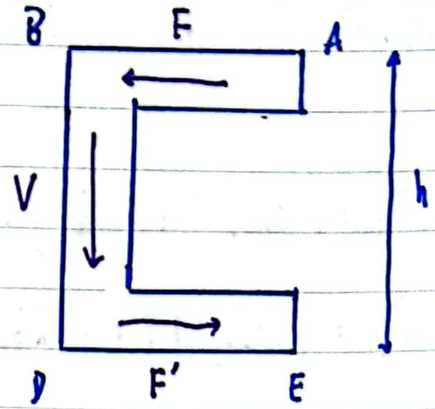
Carregamento não simétrico {Centro de corte}



Quando o carregamento é aplicado fora do plano de simetria a viga é deformada por flexão e por torção

$$\boxed{F = \int_A^B q \, ds}$$

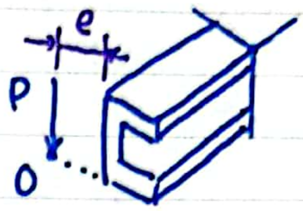
$$\boxed{V = \int_B^D q \, ds}$$



Momento torsor $= F \cdot h$

Para que não haja torsão, a carga vertical tem de ser aplicada num ponto que contrarie o momento torsor

$$V \times e = F \times h \iff \boxed{e = \frac{F \times h}{V}}$$



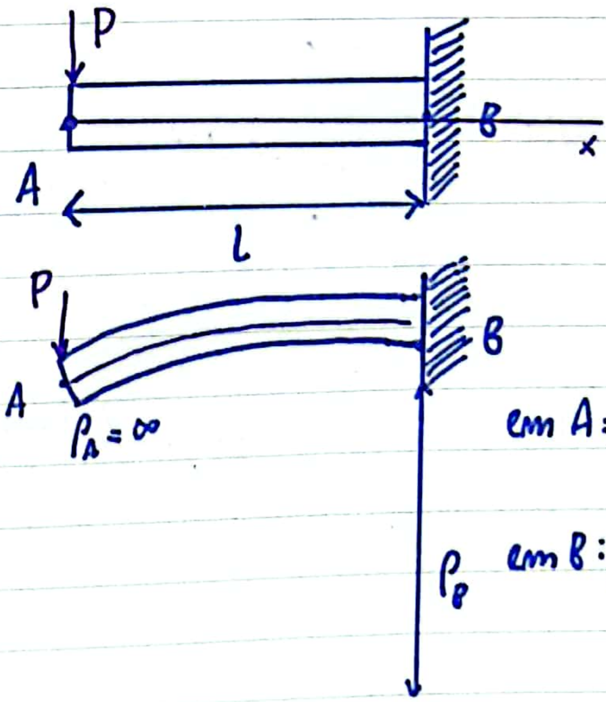
Componentes sujeitos a cargas combinadas:

- 3 componentes de força
  - força axial — Contribuem para tensões normais
  - 2 esforços transversos — Contribuem para tensões de corte
- 3 componentes de momento
  - momento torsor — Contribuem para tensões de corte
  - 2 momentos fletores — Contribuem para tensões normais

Deformada de vigas:

A curvatura ao longo da viga:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI}}$$



em A: $\frac{1}{\rho_A} = 0 \Rightarrow \rho_A = \infty$

em B: $\rho_B = \frac{EI}{PL}$

A curvatura de y(x) é dada por:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}}$$

Integrando 1x temos a rotação:

$$\theta_{(x)} = \frac{dy_{(x)}}{dx} = \int_0^x \frac{M(x)}{EI} dx + C_1$$

Integrando 2x temos a deformada:

$$y_{(x)} = \int_0^x \left(\int_0^x \frac{M(x)}{EI} dx \right) dx + C_1 x + C_2$$

$$\boxed{\theta_{(x)} = \frac{dy_{(x)}}{dx}}$$

$$\boxed{y_{(x)} = \frac{d^2 y}{dx^2}}$$

$$\boxed{\theta_{(x)} = \int_0^x \frac{M(x)}{EI} dx + B_1}$$

$$\boxed{y_{(x)} = \int_0^x \left[\int_0^x \frac{M(x)}{EI} dx \right] dx + B_1 x + B_2}$$

<u>Rotação</u>

<u>Deformada</u>

→ As constantes determinam-se com as condições de fronteira

$$\boxed{V(x) = \frac{dy^3_{(x)}}{dx^3}} \Leftrightarrow V(x) = \int_0^x \left[\int_0^x \left[\int_0^x \frac{M(x)}{EI} dx \right] dx \right] dx + \frac{B_1 x^2}{2} + B_2 x + B_3$$

<u>Esforço transverso</u>

$$\boxed{W(x) = -\frac{d^4 y_{(x)}}{dx^4}} \Leftrightarrow W(x) = \int_0^x \left[\int_0^x \left[\int_0^x \left[\int_0^x \frac{M(x)}{EI} dx \right] dx \right] dx \right] dx + \frac{B_1 x^3}{3} + \frac{B_2 x^2}{2} + B_3 x + B_4$$

<u>Carga distribuida</u>