**Matemática Computacional - Formulário:**

$$e_{\tilde{x}} = x - \tilde{x}, \qquad \delta_{\tilde{x}} = \frac{e_{\tilde{x}}}{x},\ x \neq 0$$

$$\text{erro absoluto} : |e_{\tilde{x}}|, \qquad \text{erro relativo} : |\delta_{\tilde{x}}|,\ x \neq 0$$

$$(x = \sigma(0.a_1 a_2 ...)_\beta \beta^t,\ a_1 \neq 0; \quad \tilde{x} = fl(x) \in FP(\beta, n, t_1, t_2))$$

$$|\delta_{\tilde{x}}| \leq \beta^{1-n} := U, \quad \text{(arredondamento por corte)}$$

$$|\delta_{\tilde{x}}| \leq \tfrac{1}{2}\beta^{1-n} := U, \quad \text{(arredondamento simétrico)}$$

$$\delta_{f(\tilde{x})} = \frac{e_{f(\tilde{x})}}{f(\tilde{x})} \approx \sum_{k=1}^{n} p_{f,k}(x)\delta_{\tilde{x}_k},$$

$$p_{f,k}(x) = \frac{x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)}{f(x)}$$

Método da bissecção: $x_{k+1} = \dfrac{a_k + b_k}{2}$,

$$|x - x_k| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

Método do ponto fixo: $x_{k+1} = g(x_k)$

$$|x - x_{k+1}| \leq \frac{L}{1-L}|x_{k+1} - x_k|, \quad |x - x_k| \leq L^k |x - x_0|, \qquad |x - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

Método de Newton: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$x - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x - x_k)^2, \quad \text{com } \xi_k \text{ entre } x \text{ e } x_k.$$

Método da Secante: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$

$$x - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(\eta_k)}(x - x_k)(x - x_{k-1}), \quad \text{com } \xi_k, \eta_k \text{ entre } x, x_{k-1} \text{ e } x_k.$$

Sistemas lineares:

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

$$\mathrm{cond}_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p.$$

$$A\,x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = C\,x + g \quad \to \quad x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$$

$$\|x - x^{(k+1)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

**M**étodo de Jacobi:

$$\mathbf{C} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}),$$

$$x_i^{(k+1)} = \left( b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

**M**étodo de Gauss-Seidel:

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U},$$

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)})/a_{ii}$$

**M**étodo de Newton para sistemas não lineares:

$$J(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)}); \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$$

**Fórmula de Lagrange**:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right) \qquad\qquad p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\; l_i(x)$$

**Fórmula de Newton com diferenças divididas**:

$$\begin{cases} f[x_j] = f(x_j), \quad j = 0, ..., n \\ f[x_j, ..., x_{j+k}] = \dfrac{f[x_{j+1}, ..., x_{j+k}] - f[x_j, ..., x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}, \quad j = 0, ..., n-k, \quad k = 1, ..., n \end{cases}$$

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, ..., x_i](x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})$$

$$e_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

**Sistema Normal:**

$$\begin{bmatrix} (\phi_0, \phi_0) & \ldots & (\phi_0, \phi_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\phi_m, \phi_0) & \ldots & (\phi_m, \phi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \ldots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0, f) \\ \ldots \\ (\phi_m, f) \end{bmatrix}$$

$$(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k), \quad (\phi_i, f) = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k) f_k$$

**Regra dos trapézios**:

$$T_N(f) = h \left( f(x_0)/2 + f(x_N)/2 + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right)$$

$$E_N^T(f) = -\frac{(b-a)\,h^2}{12} f^{(2)}(\xi) \qquad\qquad \xi \in (a, b)$$

**Regra de Simpson**:

$$S_N(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_N) + 4\sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{N/2-1} f(x_{2i})\right]$$

$$E_N^S(f) = -\frac{(b-a)\,h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$

**Método de Euler Explícito:**

$$y_{n+1} = y_n + h\; f(x_n, y_n)$$

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2}\; \frac{e^{(x_n - x_0)K} - 1}{K}, \qquad K = \max_{x\in[x_0,x_n],\, y\in I\!R} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|, \qquad M = \max_{x\in[x_0,x_n]} |y''(x)|$$

**Método de Euler Implícito:**

$$y_{n+1} = y_n + h\; f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

**Método deTaylor de segunda ordem:**

$$y_{n+1} = y_n + h\; f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right)$$

**Métodos de Runge- Kutta de segunda ordem**:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1 - \frac{1}{2\alpha}) f(x_n, y_n) + \frac{1}{2\alpha} f\left(x_n + \alpha h, y_n + \alpha h\, f(x_n, y_n)\right)\right]$$

$\alpha = 1/2$ - método de Euler modificado ou do ponto médio;
$\alpha = 1$- método de Heun ou dos trapézios.

**Diferenças finitas:**

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}, \qquad f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h},$$

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}, \quad f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

Sistemas lineares:

## Método de Jacobi : maior na diagonal

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^{m} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

## Método de Gauss-Seidel:

a primeira é K+1, e maior diagonais

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)}\right)}{a_{ii}}$$

## Condições de convergência para Jacobi e Gauss-Seidel:

→ A tem diag. estrit. dom por linhas $\Rightarrow \rho(C) < 1 \Rightarrow$ convergente

→ A tem diag. estrit. dom por colunas $\Rightarrow \rho(C) < 1 \Rightarrow$ convergente

ex: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ → tem diag. estrit. dom. por linhas $\Rightarrow |2| > |1|$ $|1| > 0$
mas não por colunas

## Calcular C:

$$\boxed{C_J = D^{-1}(L+U) \qquad C_{GS} = -(L+D)^{-1}U}$$

## Calcular g:

$$\boxed{g_J = D^{-1}b \qquad g_{GS} = (L+D)^{-1}b}$$

## Sistemas não lineares:

$$J(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)}) \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$$

ex: $J(0,0,0)\Delta x^{(0)} = -f(0,0,0) \longrightarrow x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$

---

## Interpolação:

### Método de Lagrange

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i) l_i(x)$$

### Método de Newton:

$$P_m(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots + f[x_0,\dots,x_m](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-1})$$

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k] = \frac{f[x_1,x_2,\dots,x_k] - f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

- Existe um único polinómio interpolador $P_m(x)$ com grau menor ou igual a $m$ tal que $P_m(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,\dots,m$
- A diferença dividida $f[x_0,x_1,\dots,x_m]$ é o coeficiente do termo $x^m$ do polinómio interpolador $P_m(x)$

### Qual o grau de uma função f que se queira calcular?

1) $\boxed{f[x_0,\dots,x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}}$

O grau em que isto acima é constante. Ou seja, o grau em que a derivada é constante

ex:
$f[1,1,1,1,x] = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = 3 \Rightarrow f \in P_4$

### Calcular o erro:

$$\boxed{e_m(x) = f[x_0,\dots,x_m,x]\,w(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}w(x)}$$

$w(x) = (x-x_0)\dots(x-x_m)$ → erro no ponto

$\xi_x \in \text{int}(x_0,\dots,x_m,x) = J$

### Calcular um majorante:

$$\boxed{|e_m(x)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}|w(x)|}$$

$$M_{m+1} = \max_{x \in J} |f^{(m+1)}(x)|$$

outras formas:

$$\boxed{|e_m(x)| \leq \frac{C_{m+1}}{4(m+1)} h^{m+1}}, \quad \forall x \in [a,b]$$

$h = \max_{i=1,\dots,m}(x_i - x_{i-1})$ $\quad C_{m+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(m+1)}(x)|$

$$\boxed{|e_m(x)| \leq \frac{C_{m+1}}{4(m+1)m^{m+1}}(b-a)^{m+1}}, \quad \forall x \in [a,b]$$

$x_i = a + ih$, $\quad h = \frac{b-a}{m}$

## Método dos mínimos quadrados

$$g(x,\theta) = \theta_0 \phi_0(x) + \theta_1 \phi_1(x) + \dots + \theta_q \phi_q(x)$$

Objetivo: $\sum_{i=0}^{m} [f(x_i) - g(x_i; \theta)]^2$

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & \dots & (\phi_0,\phi_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\phi_m,\phi_0) & \dots & (\phi_m,\phi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0, f) \\ \dots \\ (\phi_m, f) \end{bmatrix}$$

$$(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k=0}^{m} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k), \quad (\phi_i, f) = \sum_{k=0}^{m} \phi_i(x_k) f_k$$

- Quando utilizamos o método dos mínimos quadrados com $n+1$ pontos e $g \in P_n$ então obtemos o polinómio interpolador
- Curva é + suave que interpolação (não passa nos pontos)

## Integração:

### Regra de Simpson

$$S_m(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_m) + 4\sum_{i=1}^{m/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m/2-1} f(x_{2i})\right]$$

$$E_m^S(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

$$|e_{2m}^S| = \frac{1}{15}|S_{2m}(f) - S_m(f)|$$

$$E_m^S(f) = -\frac{h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)]$$

### Regra dos trapézios:

$$T_m(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_m) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i)\right]$$

$$E_m^T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \qquad |e_{2m}^T| = \frac{1}{3}|T_{2m}(f) - T_m(f)|$$

$$E_m^T(f) = -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

## Método dos coeficientes indeterminados

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad Q(f) = I(p_k) = A_0 f(x_0) + \dots + A_k f(x_k) \qquad Q(x^k) = A_0 x^k + \dots + A_k x^k$$

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + \dots + A_m = \int_a^b dx \\ x_0 A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_m A_m = \int_a^b x\,dx \\ \dots \\ x_0^m A_0 + x_1^m A_1 + \dots + x_m^m A_m = \int_a^b x^m\,dx \end{cases}$$

$\Rightarrow Q(f)$ tem grau $k$ se $Q(x^i) = I(x^i),\ i = 0,\dots,k$ $\wedge$ $Q(x^{k+1}) \neq I(x^{k+1})$

$$e_k(x) = f(x) - p_k(x) = f[x_0,\dots,x_k,x](x-x_0)\dots(x-x_k)$$

$$E(f) = I(f) - I(p_k) = \int_a^b e_k(x)\,dx$$

## Equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x_0 \le x \le T \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Para provar a existência e a unicidade de solução basta verificar que tanto $f$ como $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas

**Euler:** $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$, $|y''(t)| \le M$, $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le L$

$$|e_n| = |y(x_n) - y_n| \le \frac{hM}{2L}\left(e^{L(x_n - x_0)} - 1\right)$$

**Euler implícito:** $y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1})$

**Ponto médio (ou Euler modificado):** $y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right)$

**Heun:** $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h f(x_n, y_n))]$

**Taylor de ordem 2:** $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right)$

**Taylor de ordem k:** $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_n, y_n)$

**Runge Kutta de ordem 4:** $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(V_1 + 2V_2 + 2V_3 + V_4)$

$$\begin{aligned} V_1 &= f(x_n, y_n) \\ V_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}V_1\right) \\ V_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}V_2\right) \\ V_4 &= f(x_n + h, y_n + h V_3) \end{aligned}$$