

Formulário de Mecânica Aplicada I

Nota: Este formulário deve ser impresso numa única folha A4.
A interpretação das fórmulas é responsabilidade do aluno.

Última actualização: 18/9/2009

-
- Chumaceiras axiais; atrito em discos:

$$M = \frac{2}{3} \mu_k Q \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

-
- Igualdade entre os símbolos de permutação e os deltas de Kronecker

$$e_{ijk}e_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn}.$$

-
- Definição de produto de inércia utilizada neste formulário: $I_{ij} = - \int x_i x_j \, dm$
 - Momento de inércia em relação a um eixo OM que passa pela origem O do referencial:

$$I_{OM} = I_{xx}n_x^2 + I_{yy}n_y^2 + I_{zz}n_z^2 + 2I_{xy}n_xn_y + 2I_{xz}n_xn_z + 2I_{yz}n_y n_z$$

em que $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ é um vector unitário com a direcção do eixo.

- Rotação θ do referencial no plano, de (x, y) para (x', y') :

– Transformação do tensor de inércia:

$$\begin{bmatrix} I_{x'x'} \\ I_{y'y'} \\ I_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin 2\theta \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{xy} \end{bmatrix}$$

– Rotação θ para passar para referencial principal de inércia:

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}$$

– Valores máximo e mínimo dos momentos de inércia:

$$I_{\max}, I_{\min} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

- Teorema dos eixos paralelos para produtos de inércia:

– Se no referencial $Oxyz$ a posição da origem O' do referencial $O'x'y'z'$ é $\vec{r}_{O'/O} = (a, b, c)$ e a posição do centro de massa em $Oxyz$ é $\vec{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ então

$$I_{x'y'} = I_{xy} + m(a\bar{y} + b\bar{x} - ab),$$

$$I_{x'z'} = I_{xz} + m(a\bar{z} + c\bar{x} - ac),$$

$$I_{y'z'} = I_{yz} + m(b\bar{z} + c\bar{y} - bc).$$

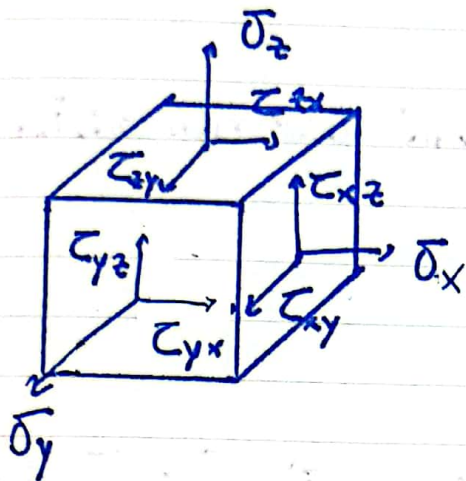
Rectângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_0 = \frac{1}{8}\pi r^4$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$
Quarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_0 = \frac{1}{8}\pi r^4$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_0 = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Tabela 1: Momentos de inércia de superfícies com formas geométricas usuais. Os produtos de inércia não são necessariamente nulos nos eixos indicados.

Barra esbelta		$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$
Placa retangular fina		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$
Prisma retangular		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Disco fino		$I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{m}{12}(3a^2 + L^2)$
Cone circular		$I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{a^2}{4} + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$

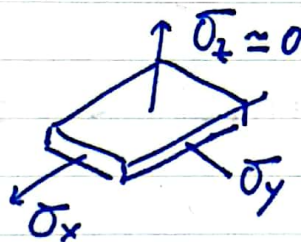
Tabela 2: Momentos de inércia de massa de sólidos com formas geométricas usuais. Os produtos de inércia não são necessariamente nulos nos eixos indicados.

Estado Plano Tensão (assumindo corpo contínuo):

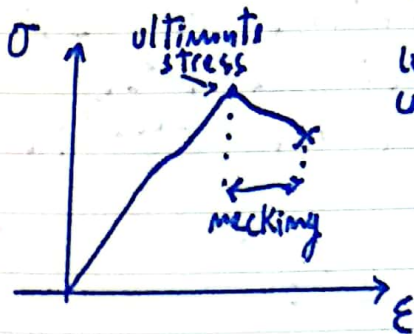


$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Fica num plano se $\sigma_z \approx 0$ e $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$



Tensão real e Deformação real:



curva
engenharia

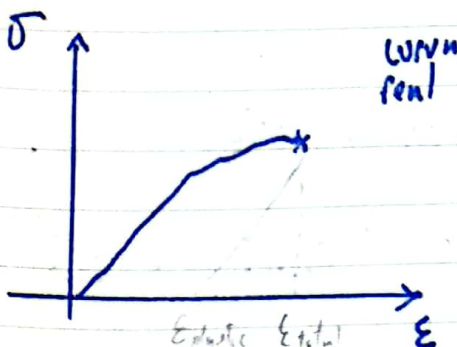
$$\sigma_e = \frac{F}{A_0}$$

$$\epsilon_e = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Porque usamos a curva de engenharia?

① Dificuldade medir a área de seção instantânea

② Só nos interessa normalmente a região plástica



curva
real

$$\sigma_r = \frac{F}{A}$$

$$\epsilon_r = \frac{\Delta L}{L} = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

Antes do necking:

- Variação do volume é baixa região elástica
- materiais são incompressíveis durante deformação plástica

$$AL = A_0 L_0$$

$$\Rightarrow A = \frac{A_0 L_0}{L}$$

$$\sigma_r = \frac{F}{A} = \frac{FL}{A_0 L_0} = \frac{F}{A_0} (1 + \epsilon_e) \Rightarrow \sigma_r = \sigma_e (1 + \epsilon_e)$$

$$\epsilon_e = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{L}{L_0} - 1 \Rightarrow \frac{L}{L_0} = 1 + \epsilon_e$$

Conclusão: $\sigma_r = \sigma_e (1 + \epsilon_e)$ e $\epsilon_r = \ln(1 + \epsilon_e)$

Tensão normal e Tensão de corte:

Extensão: $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$

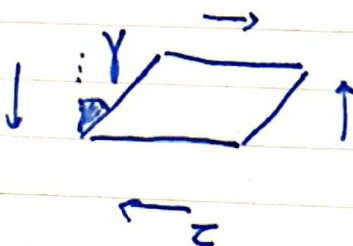
Tensão: quantidade que descreve a distribuição de forças internas de um corpo (P_n ou $\frac{N}{m^2}$)

Tensão: $\sigma = \frac{F}{A}$

$$\sigma = E \epsilon \quad (\text{tensão normal})$$

$$\tau_{\text{average}} = \frac{F}{A}$$

→ mas bordas é diferente

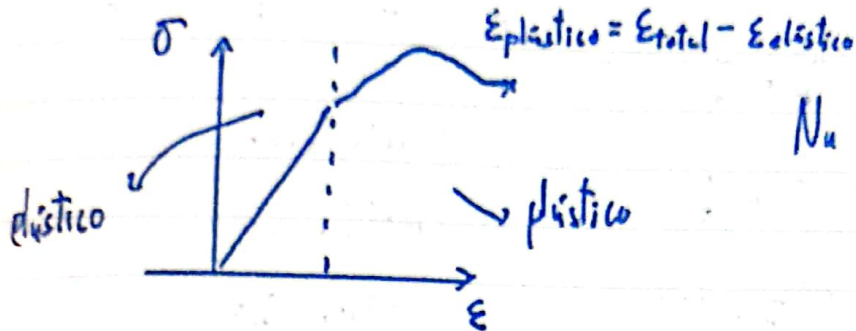


módulo de corte

$$\tau = G \gamma \quad (\text{tensão de corte})$$

Para materiais elásticos e isotrópicos (uniformes)

Modulo de Young: propriedade que mede a rigidez de um material



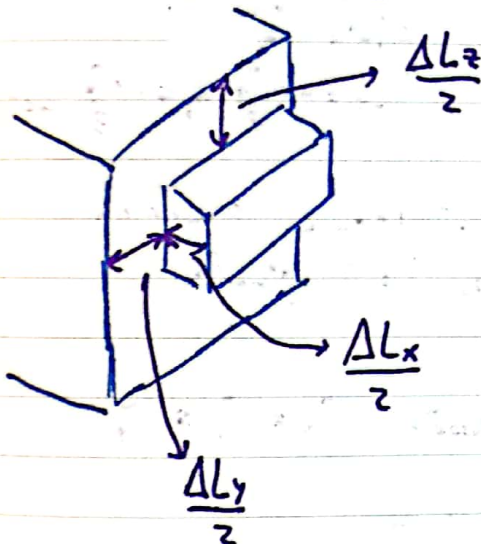
Na zona elástica:

$$\sigma = E \epsilon \text{ (Lei de Hooke)}$$

$$E_{cerâmicos} > E_{metal} \gg E_{polímeros}$$

+ E + fortes

Modulo de Poisson



$$\epsilon = \frac{\text{change in length}}{\text{original length}}$$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L_x}{L_x}$$

$$\epsilon_y = - \frac{\Delta L_y}{L_y}$$

$$\epsilon_z = - \frac{\Delta L_z}{L_z}$$

No caso de um esforço axial $\Rightarrow \epsilon_y = \epsilon_x$

$$\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = \nu = - \frac{\epsilon_{lateral}}{\epsilon_{longitudinal}}$$

$\nu = 0$ (cortíça)

$0 < \nu \leq \frac{1}{2}$ $\rightarrow$

$-1 \leq \nu < 0$ $\rightarrow$

Semão foi apenas esforço axial:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

Generalização
Hooke's Law

extensão
volumétrica : unidade de variação de volume (dilatação)

$$\begin{aligned} e_v &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \\ &= \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned}$$

Para σ_x :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Para σ_y :

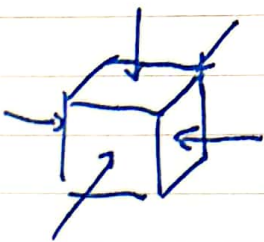
$$\epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

Para σ_z :

$$\epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

Se $\nu = 0,5 \rightarrow e_v = 0 \Rightarrow$ volume permanece constante (Material incompressível)

• Num elemento sob pressão hidrostática



pressão $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$

$$e_v = - \frac{3(1-2\nu)}{E} p = - \frac{p}{K}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (\text{módulo de compressão})$$

A extensão volumétrica tem de ser negativa logo

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$

Ductilidade, Resiliência e Tenacidade:

$\sigma_{cedência}$ → quando o corpo passa a ter deformação plástica

$\sigma_{máxima}$ → tensão máxima (quando área de seção diminui)
início do necking

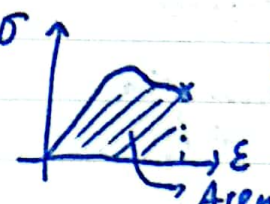
$\sigma_{ruptura}$ → tensão que de facto provoca a ruptura
($\sigma_{máxima} > \sigma_{ruptura}$) → sempre

Materiais Dúcteis (grande deformação)  deformação plástica 
→ resistência compressão $\approx$ resistência à tensão

Materiais Frágeis (pouca deformação)  alta concentração de tensão 
→ resistência compressão $>$ resistência tensão

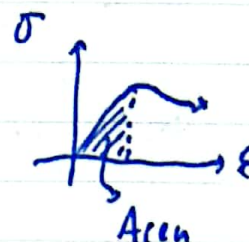
• Ductilidade - habilidade de deformar plasticamente

• Tenacidade - habilidade de absorver energia até fratura

$$T = \int_0^{\epsilon_{ruptura}} \sigma d\epsilon \left(\frac{\text{energia}}{\text{volume}} \right)$$

$$P_n = \frac{N}{m^2} \cdot \frac{m}{m} = \frac{J}{m^3}$$

• Resiliência - habilidade de absorver energia quando se deforma elasticamente

$$U_R = \int_0^{\epsilon_{el}} \sigma d\epsilon$$



Δ temperatura transição Dúctil-Frágil (T_{transição})

Tabela apoios e ligações (2D)

Das reações



Rollers



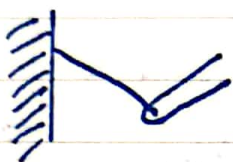
Rocker



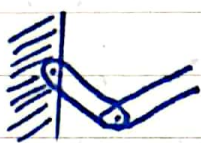
Frictionless surface



1 incognita



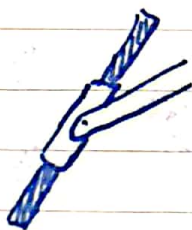
short cable



short link



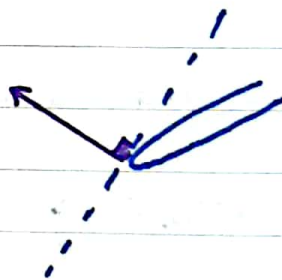
1 incognita



collar on frictionless rod



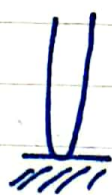
Frictionless pin in slot



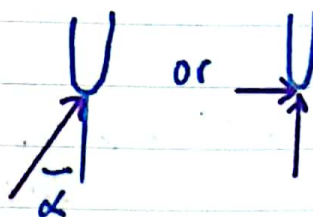
1 incognita



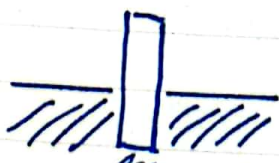
Frictionless pin or hinge



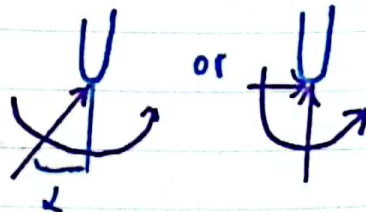
Rough Surface



2 incognitas



Fixed Support



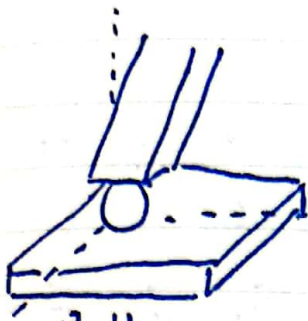
3 incognitas

1 incognita (Apoio Móvel)

2 incognitas (Apoio Fixo)

3 incognitas (Encastramento)

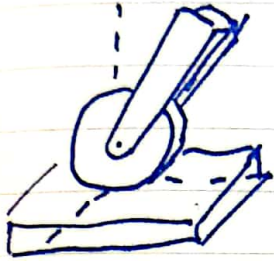
Tabela de apoios e ligações (3D)



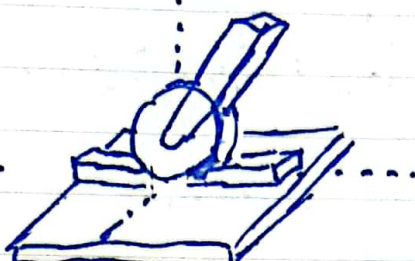
Ball



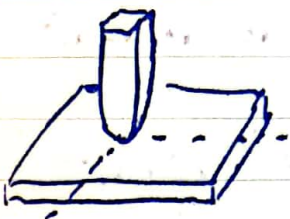
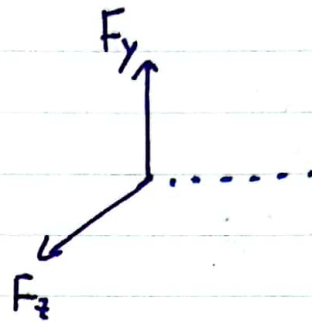
Frictionless surface



Roller on rough surface



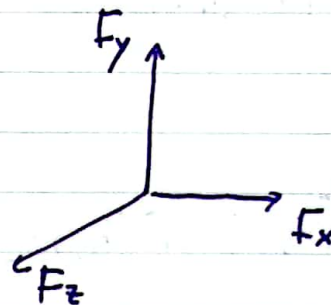
Wheel on rail



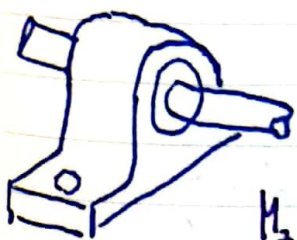
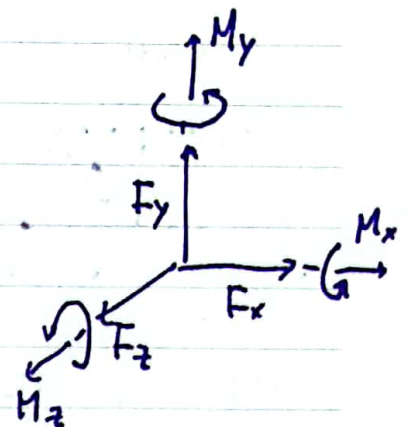
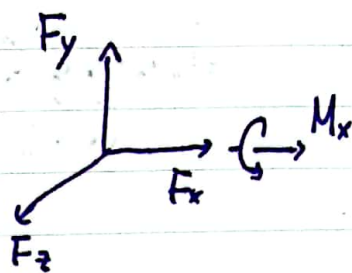
Rough surface



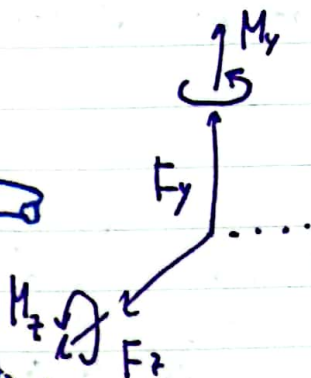
Ball and socket



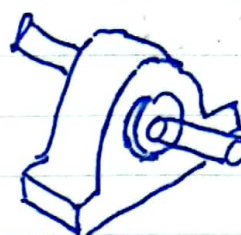
Universal joint



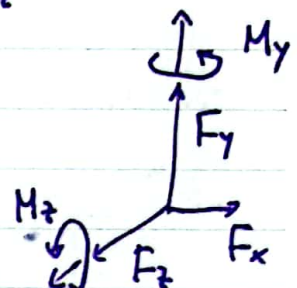
Bearing supporting radial load only



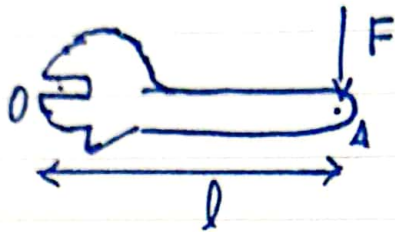
Pin and bracket



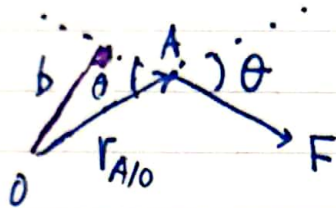
Bearing supporting axial thrust and radial load



Momento de uma força: tendência de uma força para causar um corpo rígido rodar



$$\vec{M}_O = \vec{r}_{A/O} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



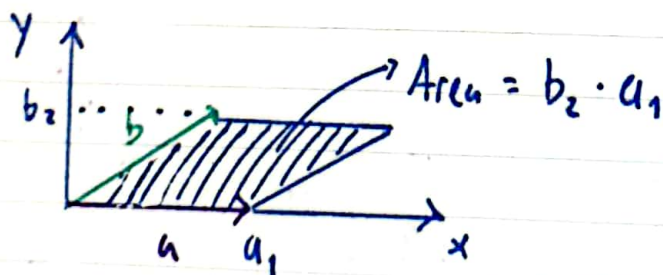
$$\begin{aligned} \|\vec{M}_O\| &= r_{A/O} \cdot F \sin \theta \\ &= b \cdot F \end{aligned}$$

$$b \sin \theta \cdot r_{A/O} = b$$

Quanto maior o braço da força menos força é necessária para o mesmo momento

Produto externo

Se $\vec{a}(a_1, 0, 0)$ $\vec{b}(b_1, b_2, 0)$ logo $(\vec{a} \times \vec{b}) = (0, 0, a_1 \cdot b_2)$



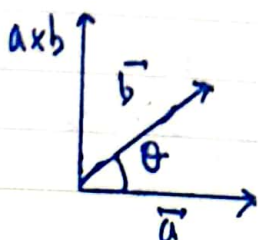
pele definição $\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$$= (b_2 a_3 - b_3 a_2) \hat{e}_1 - (a_1 b_3 - b_1 a_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \hat{e}_3$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = a_1 \cdot b_2$$

logo a área do trapézio é o módulo do produto externo

Assim, conclui-se:



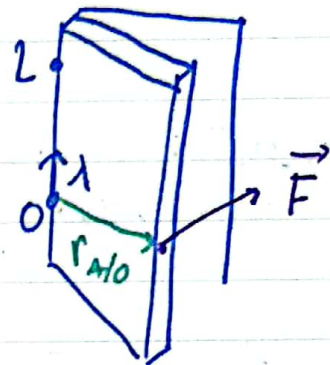
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \underbrace{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta}_{\text{área do trapézio}}$$

Ângulo entre dois vetores:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

Momento de uma força a um eixo:

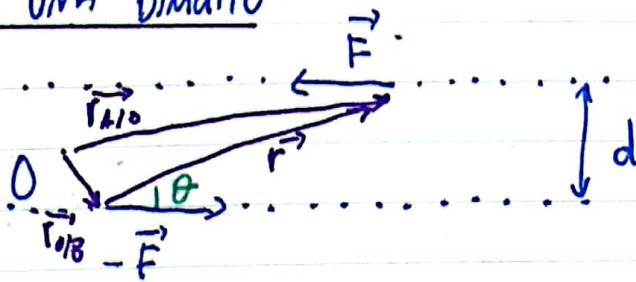
$$M_{OL} = M_O \cdot \lambda$$
$$= (r \times F) \cdot \lambda$$



λ : é o vetor unitário OL $\lambda = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}$

r : vetor posição da força até ao ponto em OL
(qualquer ponto de OL até qualquer ponto da linha de ação de F)

Momento de um binário:

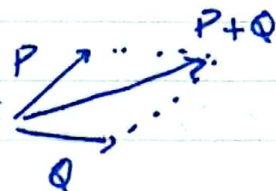
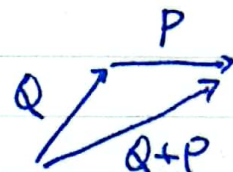


$$F_{\text{resultante}} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O = (r_{A/O} - r_{B/O}) \times \vec{F}$$

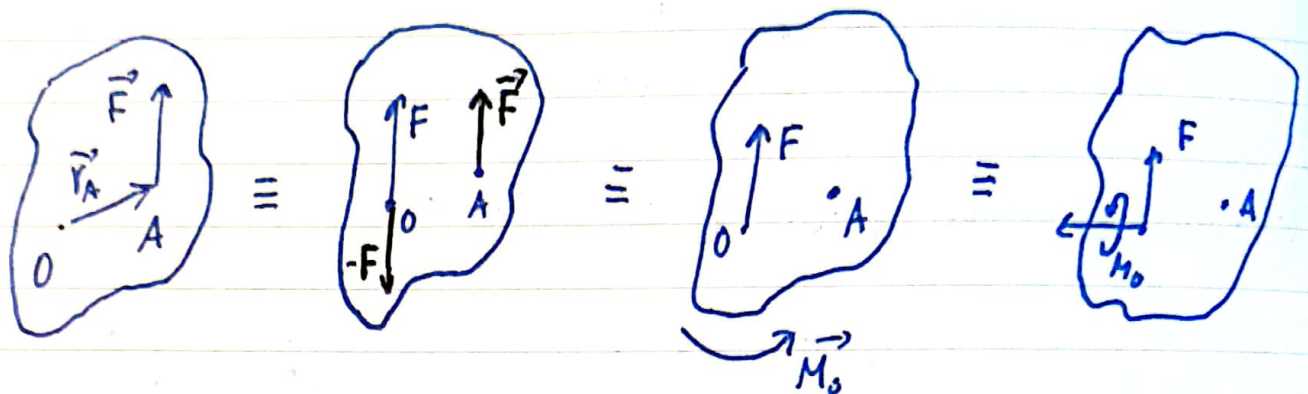
$$= r \times \vec{F}$$

$$= d \cdot F$$



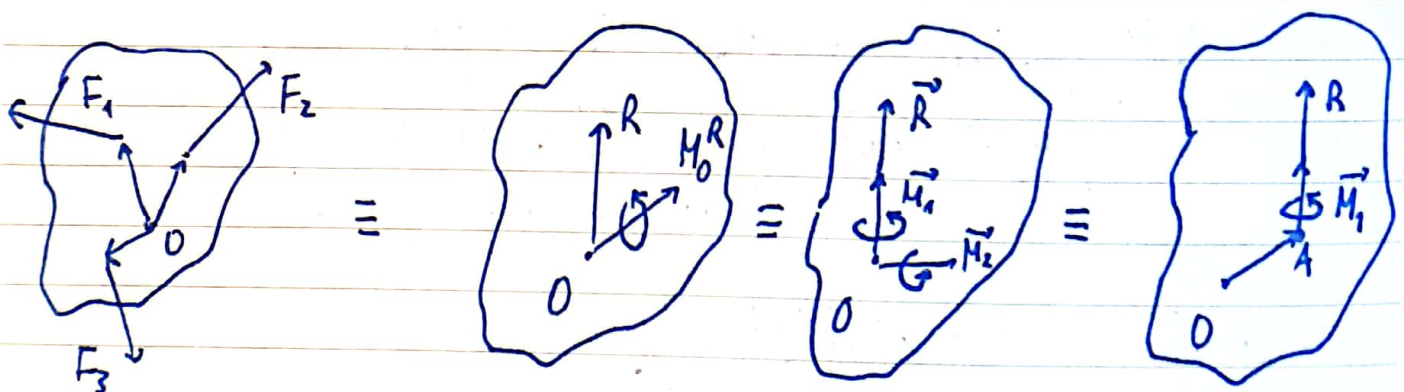
O momento não depende do ponto O

Decomposição de uma força dada numa força e um binário:



Conclusão: Um sistema de forças pode ser reduzido a uma força resultante e um momento resultante.

Conceito de tórsor:



$$\vec{M}_0 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

→ passo do tórsor: $p = \frac{M_1}{R}$

→ eixo do tórsor: o eixo que passa por A

$$\vec{M}_0 = p\vec{R} + \vec{r} \times \vec{R}$$

$$\vec{M}_1 = \left(\vec{M}_0 \cdot \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|} \right) \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}$$

Equações de equilíbrio a usar:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_o = 0 \quad (1)$$

ou

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad (2) \text{ desde que linha AB não seja paralela ao eixo do y}$$

ou



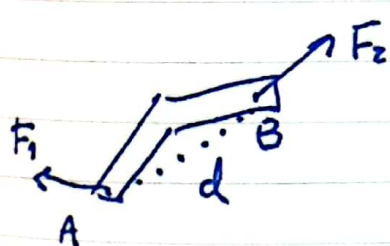
$$\sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad \sum M_C = 0 \quad (3), \text{ desde que A, B, C não estejam em linha reta}$$

> 3 incógnitas $\Rightarrow$ corpo estaticamente indeterminado

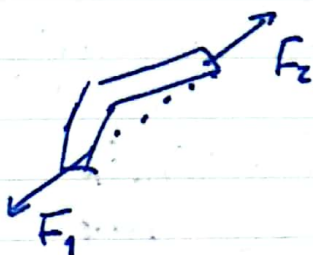
< 3 incógnitas $\Rightarrow$ corpo estaticamente determinado

Caso particular (corpo submetido a duas forças):

$\hookrightarrow$ mesma magnitude



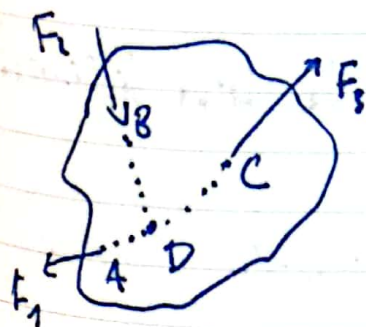
$\equiv$



$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum F_{AB} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_1 = -F_2$$

Caso particular (corpo submetido a três forças):

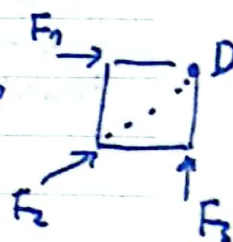


① traçar ponto de interseção entre duas forças (neste caso F_1 e F_2)

$$\textcircled{2} \sum M_D = 0$$

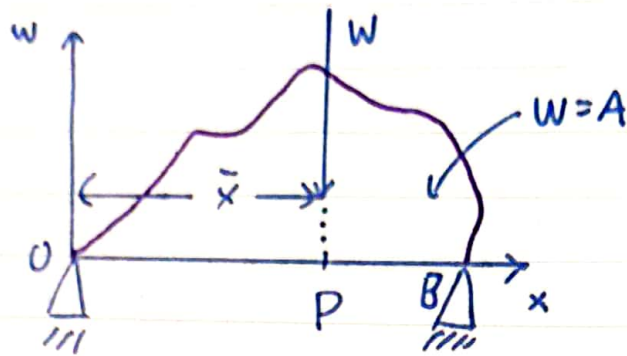
$$\Leftrightarrow M_{F_1/A} + M_{F_2/B} + M_{F_3/C} = 0$$

$$\Leftrightarrow M_{F_3/C} = 0$$



Três linhas de ação concorrentes no mesmo ponto

Forças distribuídas



força resultante

$$W = \int_0^B w(x) dx$$

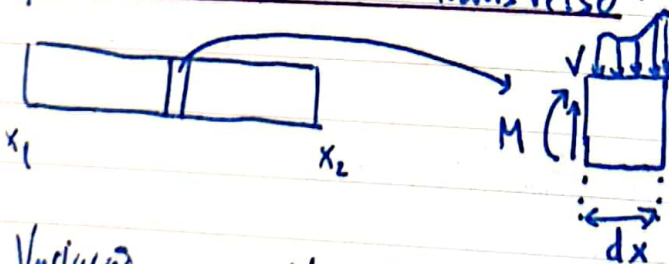
$$M_0 = \bar{x} \cdot W = \int_0^B x \cdot w(x) dx$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_0^B x \cdot w(x) dx}{W}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x w(x) dx}{\int w(x) dx}$$

componente x do centro de gravidade ou ponto de aplicação

Esforço e Momento Transverso:



$$\Rightarrow \downarrow \uparrow M \quad \uparrow \downarrow V$$

Variação
tensão corte

$$V_2 - V_1 = - \int_{x_1}^{x_2} w dx \quad (\text{Área da força distribuída})$$

Variação
momento
transverso

$$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V dx \quad (\text{Área do esforço transverso})$$

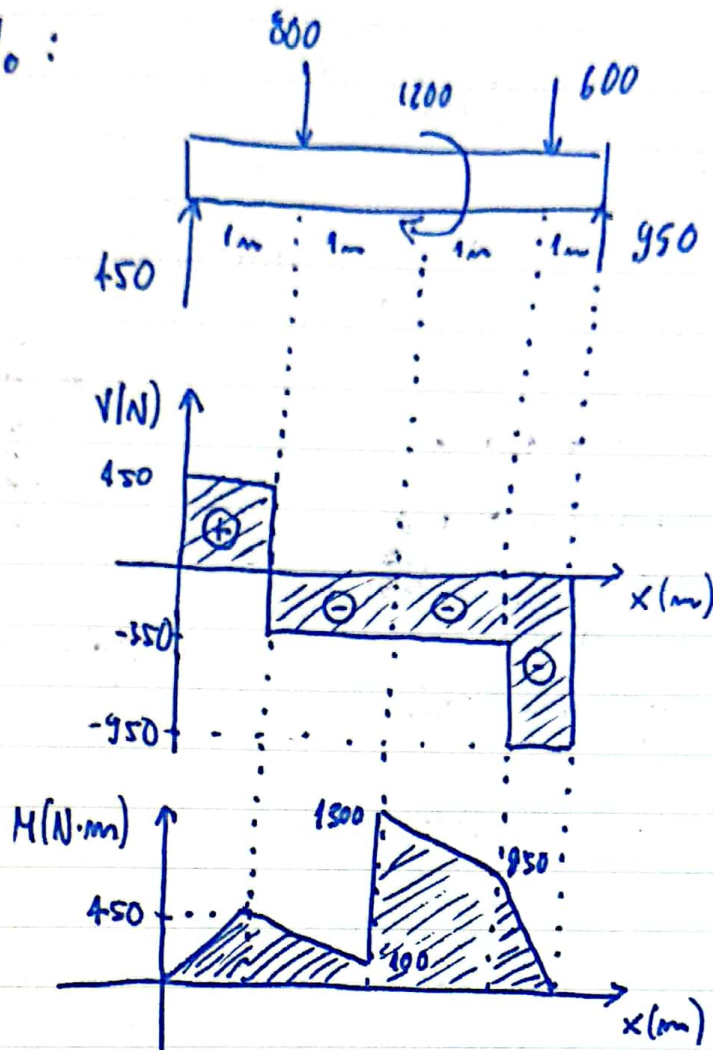
$$\frac{dV}{dx} = -w$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$V(x) = \int w(x)$$

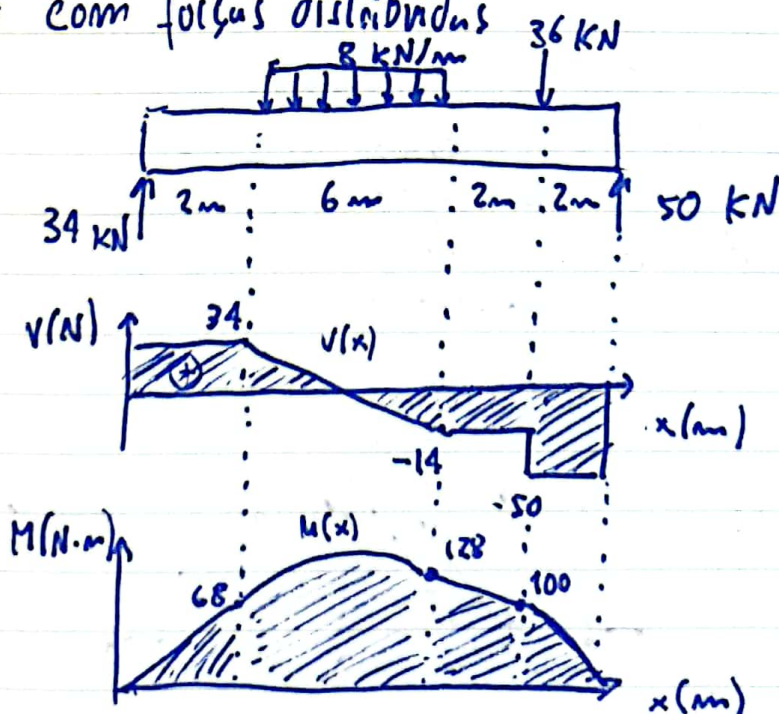
$$M(x) = \int V(x)$$

exemplo :



⊕ - declive positivo
⊖ - declive negativo

exemplo : com forças distribuídas



$$V(x) = -8x + 34$$

$$M(x) = \int V(x)$$

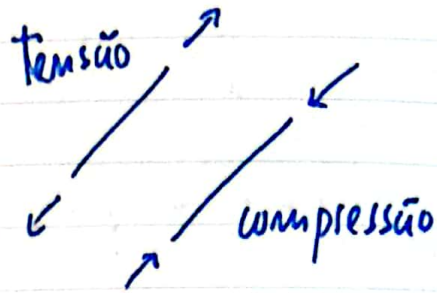
$$= -4x^2 + 34x + C$$

$$C = 68$$

$$\text{logo } M(x) = -4x^2 + 34x + 68$$

treliças:

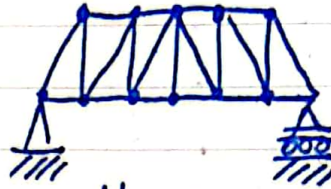
- cargas apenas nos nós
- conectados por nós



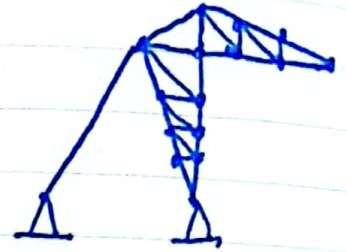
Exemplos:



Pratt
(típico em telhados)



Howe
(típico em pontes)

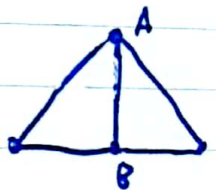
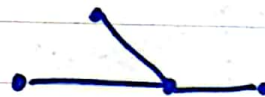


(típico nos estádios)



figura geométrica
estável

Membros de zero força:



Servem para dar estabilidade

$$AB=0$$

Método dos nós:

① Diagrama Corpo livre

② Calcular forças nó a nó

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

ou

triângulo forças

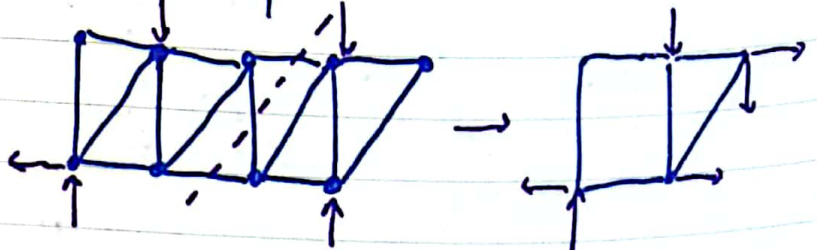
Método dos cortes:

① Diagrama Corpo livre

② Cortar a treliça

③ Calcular forças nó a nó

exemplo:

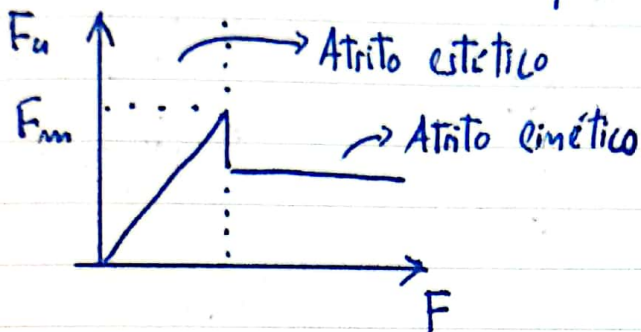


Em 2D: n mós $\Rightarrow 2n$ eqs. equilíbrio ou $2n = m + l$
↑ ↑
barras ligações

Em 3D: n mós $\Rightarrow 3n$ eqs. equilíbrio ou $3n = m + l$

Atrito:

— seco — superfícies não lubrificadas
 — viscoso — camadas de fluido

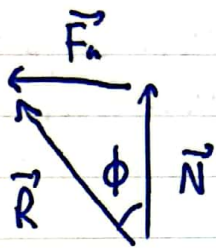


$$F_{fm} = \mu_e N$$

coeficiente atrito estático

$$F_{fc} = \mu_c N$$

coeficiente atrito cinético



$\phi < \phi_e$: sem movimento

$\phi = \phi_e$: iminência de movimento ($F_a = F_{fm}$)

$\phi = \phi_c$: corpo em movimento

↓

$$\tan \phi_e = \frac{F_a}{N} = \frac{\mu_e N}{N} = \mu_e$$

$$\Rightarrow \phi_e = \arctan(\mu_e)$$

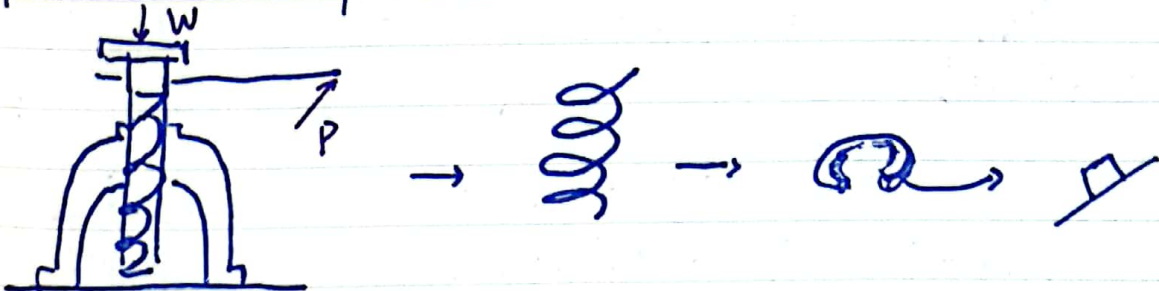
(Na iminência)

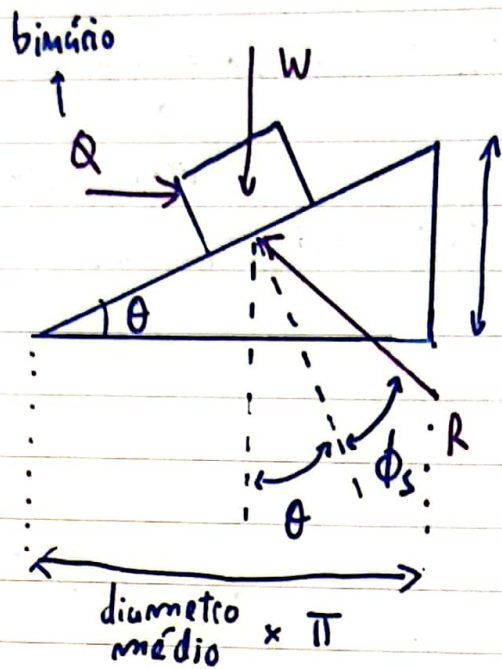
$$\tan \phi_c = \mu_c$$

$$\Rightarrow \phi_c = \arctan(\mu_c)$$

(Em movimento)

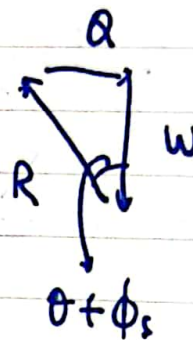
Parafusos de rosca quadrada





$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\text{passo}}{\text{d. médio}} \right)$$

passo
(o qmt sob/desce)
movimento rotatório

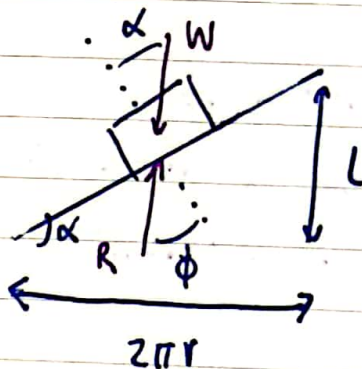


$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -rQ + lP = 0$$

$$\Rightarrow Q = \frac{l}{r} P$$

$$\Rightarrow Q \frac{d}{2} = lP$$

$$\Rightarrow \text{Torque} = Q \frac{d}{2}$$



Se o valor
 $\alpha < \phi_e$
o parafuso
é autobloqueante

$$\Rightarrow \phi = \alpha$$

Chumaceiras radiais:



$$\sum M_o = 0$$

$$\Rightarrow -M + r \sin \phi_e R = 0$$

$$\Rightarrow M = r \sin \phi_e R$$

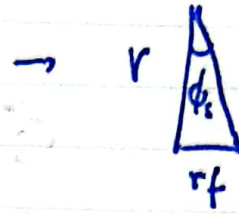
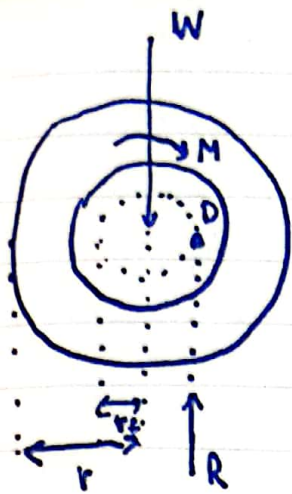
$$\phi_e \approx 0 \Rightarrow M = r \tan \phi_e R$$

$$\Rightarrow M = r \mu_e R$$



posição de
equilíbrio

chumaceiras: apoios laterais ou axiais em eixos e línguas

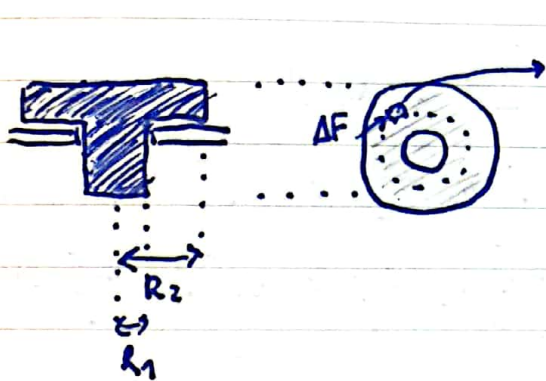


$$r_f = r \sin \phi_c$$

$$\Rightarrow r_f \approx r \tan \phi_c$$

$$\phi_c \approx 0 \Rightarrow r_f \approx r \mu_c$$

Chamunecirus axial:

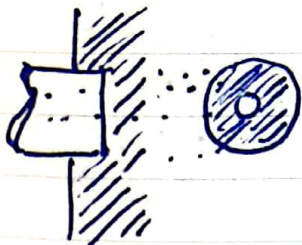


$$\Delta A = r dr d\theta$$

$$\Delta N = N \cdot \frac{\Delta A}{A} = p \frac{\Delta A}{A} = p \cdot \frac{r dr d\theta}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$\Delta F_u = \mu_c \Delta N$$

ou



$$\Delta M = r \cdot \Delta F$$

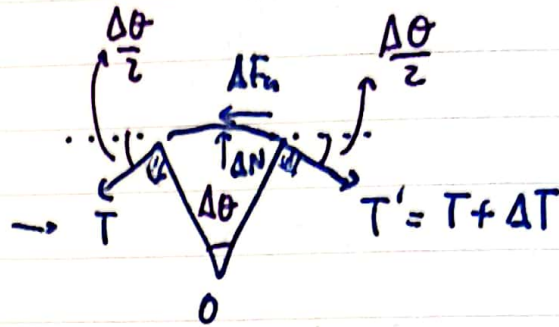
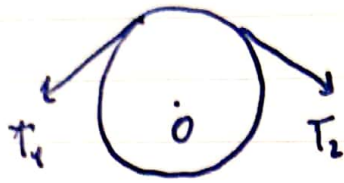
$$= \frac{r^3 \mu_c P dr d\theta}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$\rightarrow M_u = \iint_A \Delta M = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^3 \mu_c P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} dr d\theta$$

$\Rightarrow$

$$M_u = \frac{2}{3} \mu_c P \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

Atrito em correia:



$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} -T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \Delta F + (T + \Delta T) \cos \frac{\Delta\theta}{2} = 0 \\ -T \sin \frac{\Delta\theta}{2} + \Delta N - (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad & \begin{cases} \Delta F = \Delta T \cos \frac{\Delta\theta}{2} \\ \Delta N = (2T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} \end{cases} & \Delta F = \mu_c \Delta N \\ & (\Rightarrow) \Delta T \cos \frac{\Delta\theta}{2} = \mu_c (2T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} \\ & (\Rightarrow) \frac{\Delta T}{\Delta\theta} \cos \frac{\Delta\theta}{2} = \mu_c \left(T + \frac{\Delta T}{2}\right) \sin \frac{\Delta\theta}{2} \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow) \frac{dT}{d\theta} \cdot 1 = \mu_c \cdot T \frac{\Delta\theta/2}{\Delta\theta/2}, \text{ assumindo } \cos \frac{\Delta\theta}{2} \approx 1$$

$$(\Rightarrow) \frac{dT}{d\theta} = \mu_c T \quad \begin{matrix} \Delta T \ll T \\ \sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2} \end{matrix}$$

$$(\Rightarrow) \frac{1}{T} dT = \mu_c d\theta$$

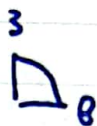
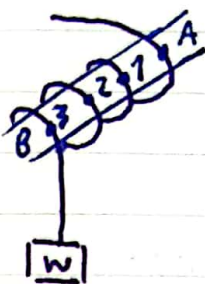
Considerando $\theta = 0 \quad T = T_1$
 $\theta = \beta \quad T = T_2$

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT = \int_0^\beta \mu_c d\theta$$

$$(\Rightarrow) \boxed{\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_c \beta}}$$

T_2 é sempre a tensão menor
 β é em rads

β pode ser superior a 2π se a correia enrolada vários vezes no veio



$$\beta = (2\pi) \cdot 3 + \frac{\pi}{2}$$

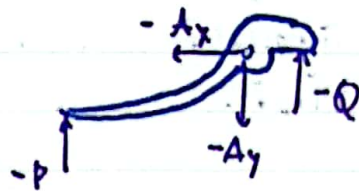
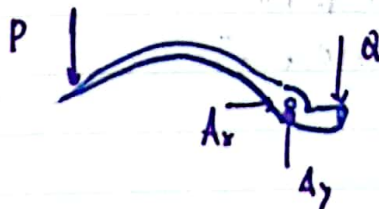
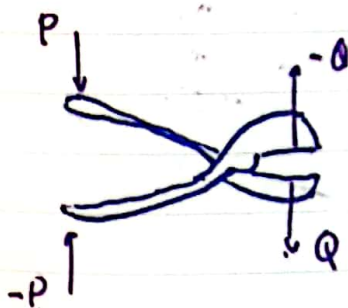
Estruturas e máquinas:

↓
Suportar forças Transmitir e modificar forças

① ver os membros de duas forças

② ver membros multiforças

Uma máquina tem pelo menos um membro com +3 forças



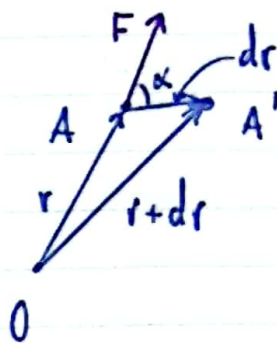
Método dos trabalhos virtuais: método eficaz na resolução de problemas de equilíbrio de corpos rígidos

$$R=0 \Rightarrow U=0$$

O trabalho da força $\vec{F}$ no deslocamento $d\vec{r}$ é definido pelo produto interno:

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

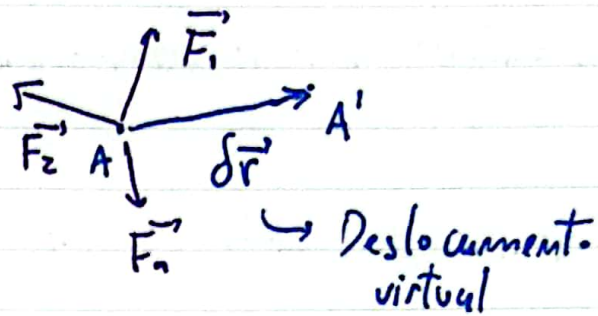
$$\Rightarrow dU = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cos \alpha$$



$$[U] = J (\text{joule}) \quad (1J = 1N \cdot m)$$

Princípio dos trabalhos virtuais:

Considere-se uma partícula com várias forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ aplicadas que pode sofrer um deslocamento $\delta \vec{r}$ no seu movimento de A para A'.



• O Trabalho virtual é dado por

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2 + \dots + \delta U_n$$

$$\Leftrightarrow \delta U = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \delta \vec{r}$$

$$\Leftrightarrow \delta U = \vec{R} \cdot \delta \vec{r}$$

Corpo em equilíbrio:

$$1) \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \delta U = 0$$

$$2) \delta U = 0 \text{ logo } \forall \delta \vec{r} \Rightarrow \vec{R} = \vec{0}$$

Princípio: Se uma partícula está em equilíbrio o trabalho virtual das forças que atuam na partícula é nulo, para qualquer deslocamento virtual da partícula.

Exemplo:

$$\delta U = \delta U_{A_x} + \delta U_{A_y} + \delta U_P + \delta U_N + \delta U_Q$$

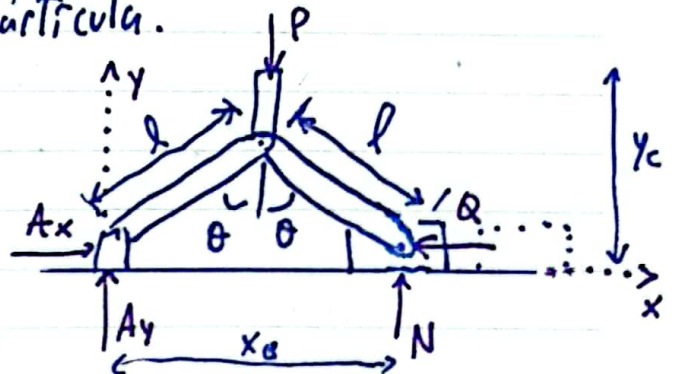
$$= -Q \delta x_B - P \delta y_C$$

$$= -Q (2l \cos \theta \delta \theta) - P (-l \sin \theta \delta \theta)$$

$$= l [P \sin \theta - 2Q \cos \theta] \delta \theta$$

$\delta U = 0$ / princípio trabalhos virtuais

$$\Rightarrow Q = \frac{P}{2} \tan \theta$$



A é um ponto fixo

B move-se horizontalmente

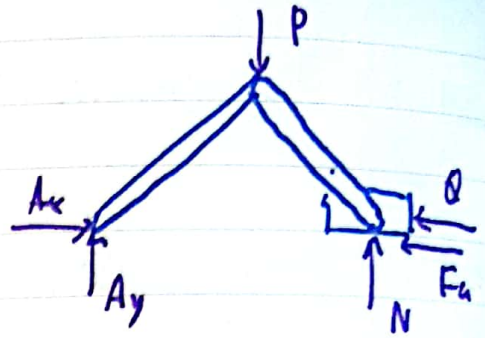
$$x_B = 2l \sin \theta \Rightarrow x_B = x_B(\theta)$$

$$\Rightarrow \delta x_B = \frac{\partial x_B}{\partial \theta} \delta \theta = 2l \cos \theta \delta \theta$$

$$y_C = l \sin \theta \Rightarrow \delta y_C = l \cos \theta \delta \theta$$

Rendimento Mecânico:

Aumentando atrito no exemplo anterior



Trabalho de saída < trabalho de entrada

$$\delta U = \underbrace{\delta U_{A_x}}_0 + \underbrace{\delta U_{A_y}}_0 + \delta U_P + \underbrace{\delta U_N}_0 + \delta U_Q + \delta U_F$$

$$= \delta U_P + \delta U_Q + \delta U_F$$

$$= l [P \sin \theta - 2Q \cos \theta - 2F \cos \theta] \delta \theta$$

$$\delta U = 0$$

$$\Rightarrow Q = \frac{P \sin \theta - 2F_a \cos \theta}{2 \cos \theta} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{P}{2} (\tan \theta - \mu)$$

Rendimento mecânico de uma máquina:

$$\eta = \frac{\text{Trabalho de saída}}{\text{Trabalho de entrada}}$$

Neste exemplo,

$$\eta = \frac{\delta U_Q}{\delta U_P} = 1 - \mu \cot \theta$$

Trabalho de uma força num deslocamento finito:

$$dU = F \cos \alpha \, ds$$

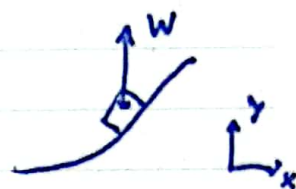
$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \alpha \, ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \, d\theta$$

$$U = \int F \cos \alpha \, ds$$

Se F for constante

$$U_{1 \rightarrow 2} = F(s_2 - s_1) = M(\theta_2 - \theta_1)$$

Trabalho da força gravítica:



$$dU = -W \, dy \Rightarrow U_{1 \rightarrow 2} = -W \int_{y_1}^{y_2} dy = -W \Delta y$$

O trabalho é positivo quando $\Delta y < 0$

$$U_w = -W \Delta y = mg(h_f - h_i)$$

Trabalho da força elástica:



$$F = K \Delta x \quad (\text{experimentalmente verifica-se esta proporcionalidade})$$

$\hookrightarrow$ constante da mola, $[K] = \text{N/m}$

$$\begin{cases} d\vec{r} = dx \, \vec{e}_x \\ \vec{F} = -F \vec{e}_x \end{cases} \Rightarrow dU = -F \, dx = -Kx \, dx$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{x_1}^{x_2} Kx \, dx = \frac{1}{2} Kx_1^2 - \frac{1}{2} Kx_2^2$$

$$U_e = -\frac{1}{2} K(x_f^2 - x_i^2)$$

Energia Potencial

O trabalho das forças gravíticas e elásticas não depende do caminho percorrido mas apenas das posições inicial e final:
forças conservativas

Surge conceito de energia potencial:

Energia potencial gravítica: $U_{1 \rightarrow 2} = mg(y_1 - y_2) = (V_g)_1 - (V_g)_2$

Energia potencial elástica: $U_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} K (x_1 - x_2) = (V_E)_1 - (V_E)_2$

$$V_g = mgy \quad V_E = \frac{1}{2} K x^2$$

Equilíbrio e estabilidade

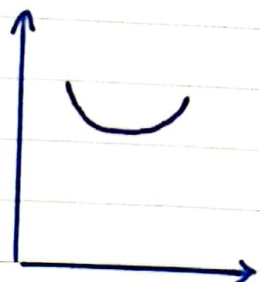
$$\delta U = -\delta V$$

$$W_{fg} = -\Delta E_{pg}$$

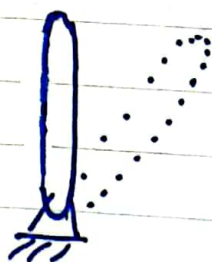
"Se um sistema conservativo está em equilíbrio, a derivada da sua energia potencial é nula".



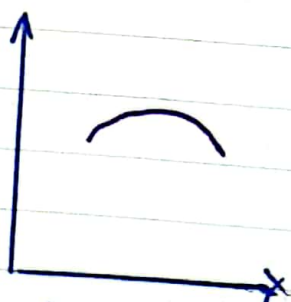
Equilíbrio Estável



$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} > 0$$



Equilíbrio Instável



$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} < 0$$



Equilíbrio Neutro



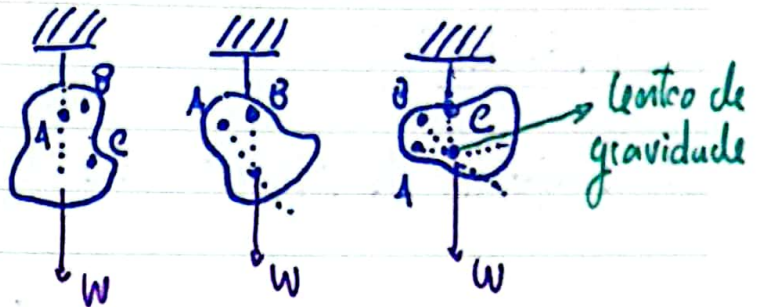
$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = 0$$

$$\Rightarrow \delta V = \frac{dV}{d\theta} \cdot \delta\theta$$

" 0

Centro de gravidade:

- Não temos um único centro de gravidade pois as forças gravíticas não são paralelas e variam com o inverso do quadrado da distância (no everest a força da gravidade é muito pequena)



sendo $\vec{P} = \int d\vec{P}$ em que $\vec{P} = -P\vec{e}_y$ ($P = mg$)
↳ força gravítica

Momento em relação eixo x:

$$\int x dP$$
$$\Rightarrow \bar{x}P = \int x dP \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x dP}{P}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{\int x dP}{P} ; \bar{y} = \frac{\int y dP}{P} ; \bar{z} = \frac{\int z dP}{P}}$$

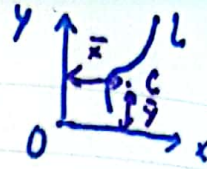
Como $P = mg$ e $dP = g dm$ Temos o centro de massa:

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{\int x dm}{m} ; \bar{y} = \frac{\int y dm}{m} ; \bar{z} = \frac{\int z dm}{m}}$$

sendo $\rho = \frac{m}{V}$ onde ρ é a massa específica/densidade $\Rightarrow dm = \rho dV$
Se ρ for constante; temos a definição de centroide:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV} ; \bar{y} = \frac{\int_V y dV}{V} ; \bar{z} = \frac{\int_V z dV}{V}}$$

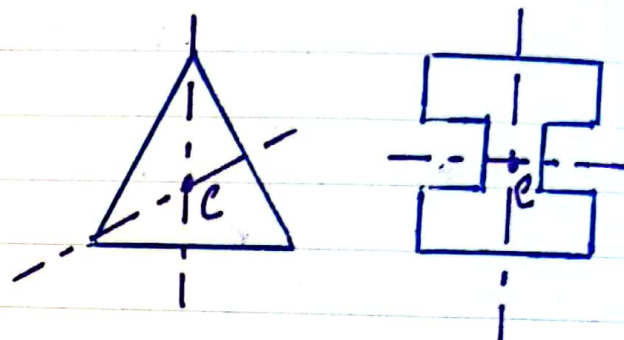
Centróides:



1) Centróides de linhas: $\bar{x} = \frac{\int x dL}{L}$; $\bar{y} = \frac{\int y dL}{L}$; $\bar{z} = \frac{\int z dL}{L}$

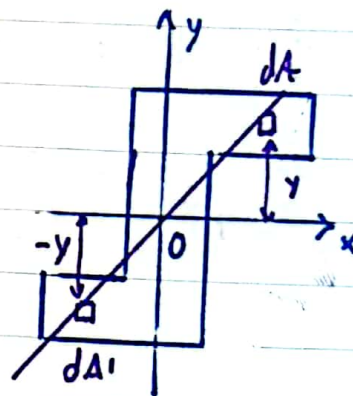
2) Centróides de superfícies: $\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$; $\bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$; $\bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$

$\int x dA$ - Momento estático
ou momento de 1ª ordem
em relação ao plano yz



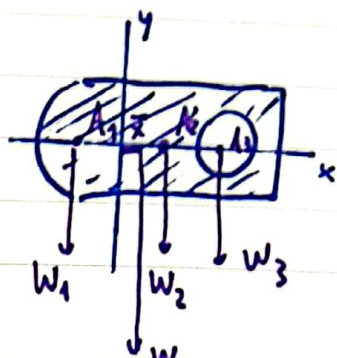
• Se a sup. ou linha possui dois eixos de simetria o centróide encontra-se na interseção

• Se para cada elemento dA da sup. e coordenadas (x, y) , existe um elemento $(-x, y)$ logo $\int x dA = \int y dA = 0$ e centróide coincide com ponto O



3) Centróides de volumes: $\bar{x} = \frac{\int x dV}{V}$; $\bar{y} = \frac{\int y dV}{V}$; $\bar{z} = \frac{\int z dV}{V}$

Regra dos Corpos Compostos



$$W = W_1 + W_2 - W_3$$

$$\boxed{1} + \boxed{2} - \boxed{3}$$

$$\Rightarrow \bar{x} \cdot W = \bar{x}_1 \cdot W_1 + \bar{x}_2 \cdot W_2 - \bar{x}_3 \cdot W_3$$

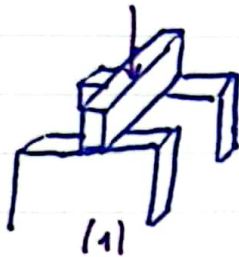
Tabela

	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$	A_i	$\bar{x}_i A_i$	$\bar{y}_i A_i$	$\bar{z}_i A_i$
corpo 1							
corpo 2							
corpo 3							
Σ							

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \Rightarrow \bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x}_i A_i}{\Sigma A_i}$$

Momento de inércia de Área (Momento de 2ª ordem):
(superfície)

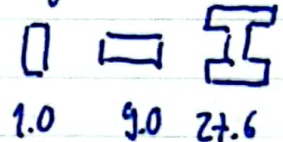
Resistência da área de seção à curvatura (uniliter vigas e columns)



(1)

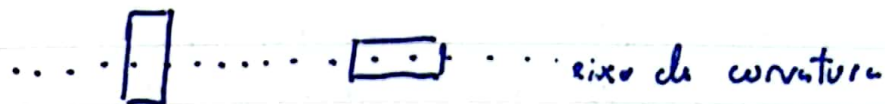


(2)



1.0 9.0 27.6

No caso (2) a barra vai curvar mais, porque tem o seu material mais perto do eixo de curvatura



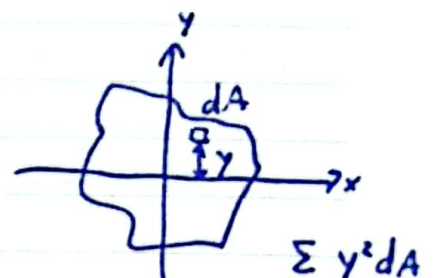
Ou seja, quanto maior a distância ao eixo, de todas as áreas de seção infinitesimais, mais resistência à curvatura.

$$\Delta F = k y \Delta A \Rightarrow F_R = \int k y dA$$

$$M = \int k y^2 dA$$

Momento de Inércia $\Rightarrow M = k \int y^2 dA \text{ (Kg m}^2\text{)}$

Momento de Inércia de Área $\left\{ \begin{array}{l} I_x = \int y^2 dA \\ I_y = \int x^2 dA \end{array} \right. \text{ (mm}^4\text{)}$



Distância ao eixo de todas as áreas infinitesimais

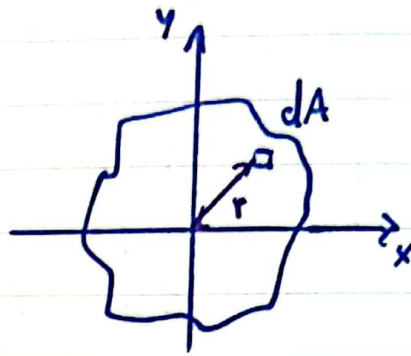
Momento polar de inércia: momento de inércia da área da sup. A em relação ao eixo polar z

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$J = \int \rho^2 dA$$

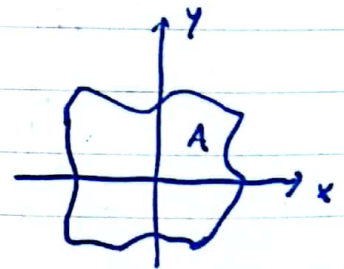
$$= \int x^2 + y^2 dA$$

$$= \int x^2 dA + \int y^2 dA \Rightarrow J = I_x + I_y$$



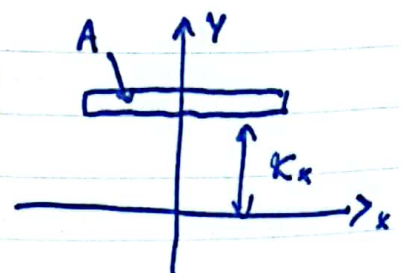
Raio de Giração de uma superfície:

- Considerando uma superfície com área A e $I_x = \int y^2 dA$



- Para substituir a sup. A por uma faixa estreita paralela ao eixo x com a mesma área da sup A, deve ser colocada a uma dist. k_x do eixo x:

$$I_x = k_x^2 \cdot A$$



Raio de giração da sup A no eixo x:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

Raio de giração da sup. A no eixo y:

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Raio de giração polar: $k_z = \sqrt{\frac{J}{A}} \Rightarrow$

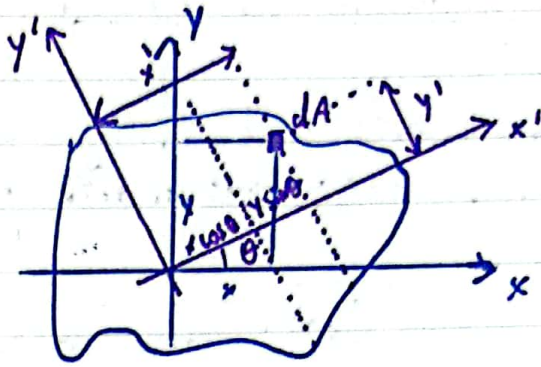
$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Nota: $I_y = \int x^2 \rho dV = m k_y^2 \Rightarrow k_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$

Eixos e Momentos Principais de Inércia:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = y \cos \theta - x \sin \theta \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta & (1) \\ I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta & (2) \\ I_{x'y'} = -\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \rightarrow \left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta + I_{xy}^2 \sin^2 2\theta + (I_x - I_y) I_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta \\ 3 \rightarrow (I_{x'y'})^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta + I_{xy}^2 \cos^2 2\theta - (I_x - I_y) I_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2$$

$$I_{\text{medio}} = \frac{I_x + I_y}{2}$$

$$R^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2$$

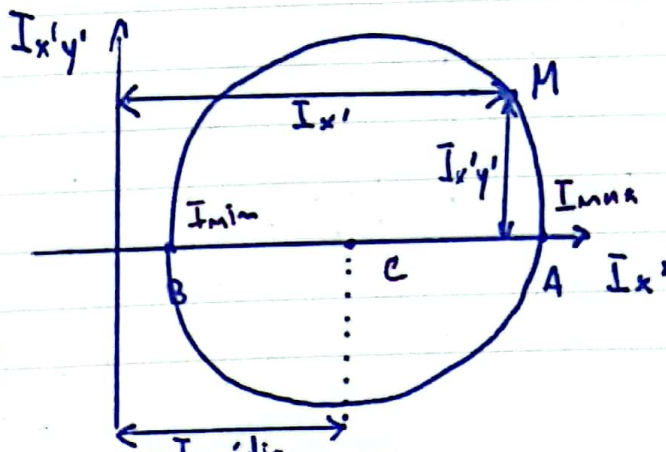
$$\Rightarrow (I_{x'} - I_{\text{medio}})^2 + (I_{x'y'})^2 = R^2$$

Se $I_{x'y'} = 0$:

$$\tan 2\theta_m = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$



↑
Rotação para passar
para referencial principal
de inércia



Círculo
de Mohr

Obtendo as duas soluções de θ obtêm-se os eixos principais de inércia (são sempre perpendiculares entre si)

Os momentos de inércia máximo e mínimo são designados por: momentos principais de inércia

$$\begin{cases} (I_{x'} - I_{med})^2 + I_{xy'}^2 = R^2 \\ (I_{y'} - I_{med})^2 + I_{xy'}^2 = R^2 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pú para } I_x \\ \text{e } I_y \end{array} \right.$$

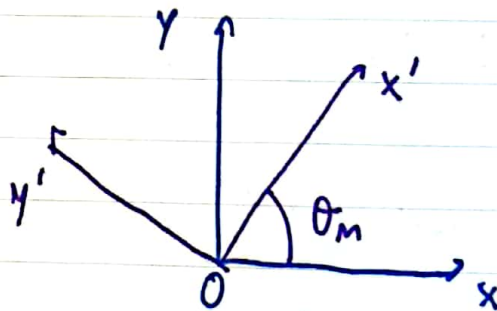
$$I_{max, min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad \left| \begin{array}{l} I_{max} = I_{med} + R \\ I_{min} = I_{med} - R \end{array} \right.$$

Notas:

→ No referencial $x'y'$ rodado de θ_m :

$I_{x'}$ é mínimo

$I_{y'}$ é máximo



→ No ref. principal central de inércia o corpo apresenta o menor valor possível para o momento de inércia em relação a um eixo

→ No ref $x'y'$ rodado de θ_m

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \rightarrow I_{i'j'} = \begin{bmatrix} I_{min} & 0 \\ 0 & I_{max} \end{bmatrix}$$

↓
valores próprios de I_{ij}

→ A 3D

Ref. xyz :

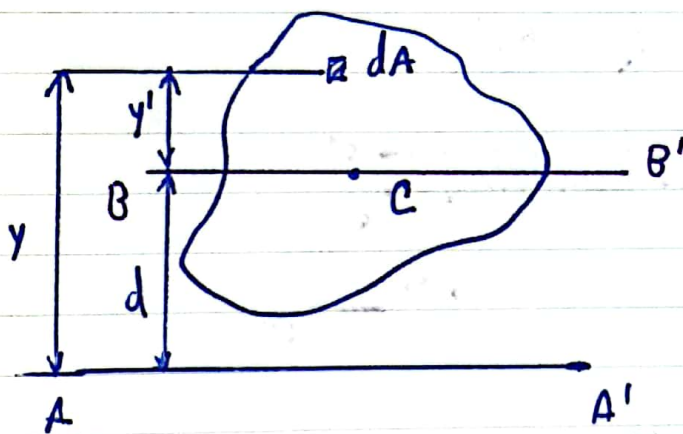
$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

Ref $x'y'z'$:

$$I_{i'j'} = \begin{bmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{bmatrix}$$

↓
cálculo dos valores e vetores próprios

Teorema dos Eixos Paralelos:



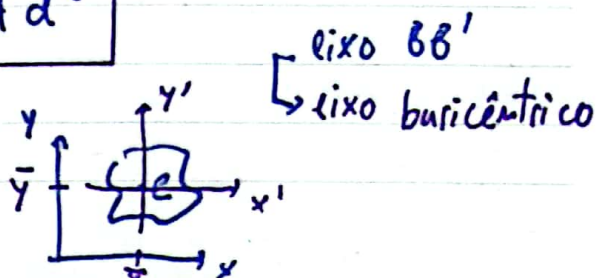
$$y = y' + d$$

$$\begin{aligned} I_{AA'} &= \int_A y^2 dA = \int_A (y' + d)^2 dA = \int_A y'^2 dA + 2d \int_A y' dA + d^2 \int_A dA \\ &= I_{BB'} + 2d A \bar{y}' + d^2 A \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y' dA}{\int dA} \end{aligned}$$

Como BB' passa pelo centroide da sup $A \Rightarrow \bar{y}' = 0$

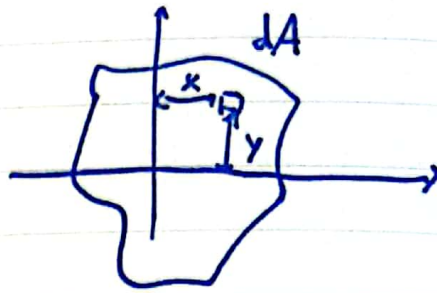
$$\Rightarrow \boxed{I_{AA'} = I_{BB'} + A d^2}$$

De forma genérica:

$$\begin{cases} I_x = \bar{I}_{x'} + A \bar{y}^2 \\ I_y = \bar{I}_{y'} + A \bar{x}^2 \end{cases}$$


Produto de Inércia:

$$I_{xy} = - \int xy \, dA$$

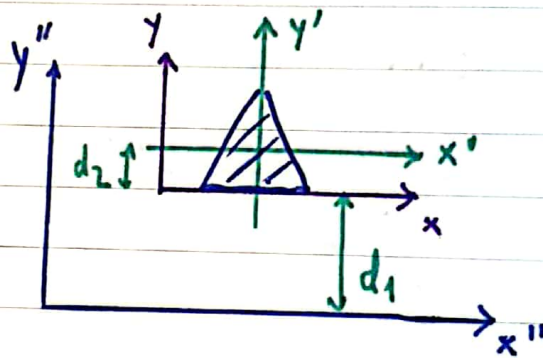


• tensor de Inércia:

$$\underline{I}_j = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{xx} & \bar{I}_{xy} \\ \bar{I}_{xy} & \bar{I}_{yy} \end{bmatrix}$$

É possível deduzir que: $I_{xy} = I_{x'y'} - A \bar{x} \bar{y}$

Exemplo:



$$\begin{cases} I_x = \bar{I}_{x'} + A d_2^2 \\ I_{x''} = \bar{I}_{x'} + A (d_1 + d_2)^2 \end{cases} \Rightarrow I_{x''} = I_x + \underbrace{A (d_1 + d_2)^2 - A d_1^2}_{\neq A d_1^2}$$

Momentos de Inércia para placas finas:

$$dm = \rho \, dV = \rho \cdot t \cdot dA$$

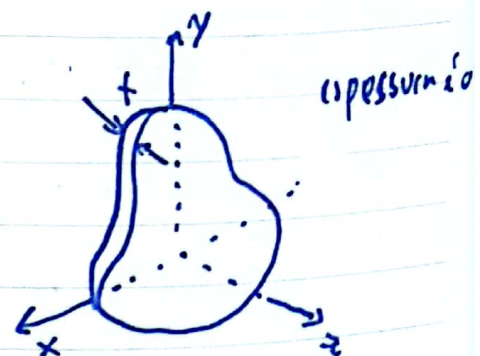
$$I_y = \int (x^2 + z^2) dm \approx \int x^2 dm = \rho t \int x^2 dA$$

$$I_x = \rho t \int y^2 dA$$

$$I_t = I_x + I_y$$

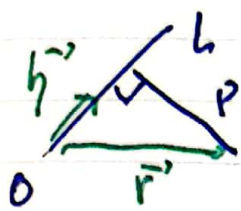
$$I_{xz} \approx 0 \quad I_{yz} \approx 0$$

$$I_{xy} = - \rho t \int xy \, dA$$



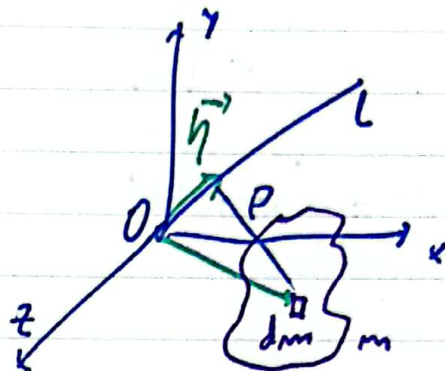
Basicamente é igual a calcular momentos de inércia de área

Momento de Inércia em relação a um eixo arbitrário:



$$\Rightarrow p = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow |\vec{h}' \times \vec{r}'|$$



$\vec{h}'$ - vetor unitário do eixo

$$I_{OL} = \int p^2 dm = \int |\vec{h}' \times \vec{r}|^2 dm = \int [(h_y z - h_z y)^2 + (h_z x - h_x z)^2 + (h_x y - h_y x)^2] dm$$

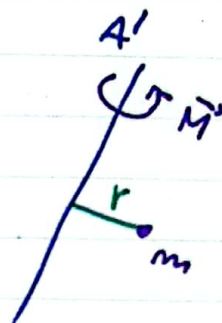
$$\Rightarrow I_{OL} = I_x h_x^2 + I_y h_y^2 + I_z h_z^2 + 2I_{xy} h_x h_y + 2I_{xz} h_x h_z + 2I_{yz} h_y h_z$$

Momento de inércia de uma massa:

$\alpha = \frac{\tau}{I}$, a massa pontual é uma medida da resistência do corpo ao movimento

Para a mesma massa pontual rodar em torno de um eixo AA' , sob a aplicação de um binário M , a aceleração angular α é inversamente proporcional à sua massa e ao quadrado da distância r ao eixo AA' :

$$\alpha = \frac{M}{(mr^2)} = \frac{M}{I}$$



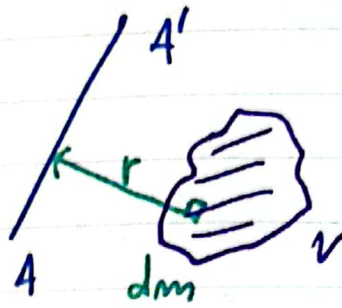
O momento de Inércia I é uma medida da inércia do corpo ao movimento de rotação

$$I = m r^2$$

$$\Rightarrow I = \int r^2 dm$$

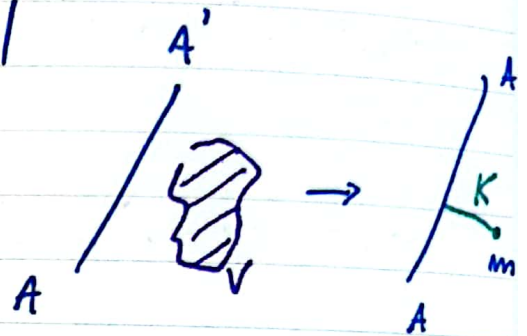
$$\Rightarrow I = \int \rho r^2 dV$$

$$dm = \rho dV$$



Para substituir para uma massa pontual

$$I = m k^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$



Momentos de Inércia em relação aos eixos coordenados:

$$I_x = \int_V \rho (y^2 + z^2) dV$$

$$I_{xy} = - \int_V \rho xy dV$$

$$I_y = \int_V \rho (x^2 + z^2) dV$$

$$I_{xz} = - \int_V \rho xz dV$$

$$I_z = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV$$

$$I_{yz} = - \int_V \rho yz dV$$

Teorema dos eixos paralelos:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} - m \bar{x} \bar{y}$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m (\bar{x}^2 + \bar{z}^2)$$

$$I_{xz} = \bar{I}_{x'z'} - m \bar{x} \bar{z}$$

$$I_z = \bar{I}_{z'} + m (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

$$I_{yz} = \bar{I}_{y'z'} - m \bar{y} \bar{z}$$

Cinematática dos corpos rígidos:



Translação: Qualquer linha reta no interior do corpo mantém a sua direção durante o movimento



Como o movimento é de translação, o vetor $\vec{v}_{B/A}$ é constante, logo $\frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \vec{0}$

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$$

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A$$

Conclusão: Todas as partículas do corpo apresentam no mesmo instante a mesma velocidade e aceleração

Rotação em torno de um eixo:

Deslocamento de P: $\Delta s = \overline{BP} \cdot \Delta \theta$

$$\Leftrightarrow r \sin \phi \Delta \theta = \Delta s$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r \sin \phi \frac{d\theta}{dt}$$

Seja ω a velocidade angular:

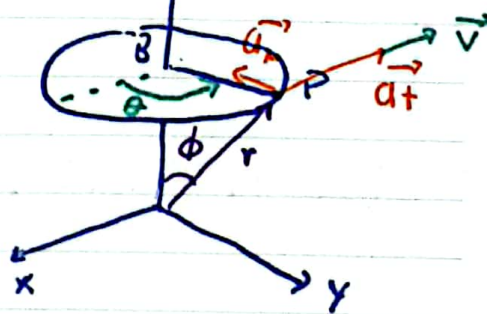
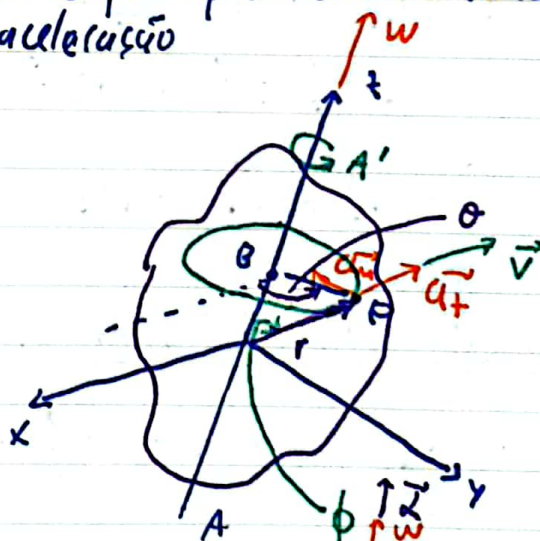
$$v = \omega r \sin \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\text{aceleração tangencial}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\text{aceleração centrípeta}}}$$

$\vec{\alpha}$ é aceleração angular

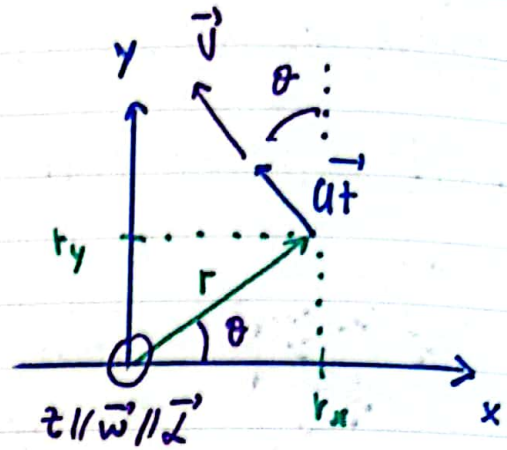


exemplo: no plano xy

$$\vec{r} = r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y$$

$$\omega \perp r \Rightarrow \phi = 90^\circ \Rightarrow \sin \phi = 1$$

$$\Rightarrow |\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \phi = \omega r$$



$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \vec{e}_z \times [r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y] \\ &= \omega r_x \vec{e}_z \times \vec{e}_x + \omega r_y \vec{e}_z \times \vec{e}_y \\ &= \omega (r_x \vec{e}_y - r_y \vec{e}_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \alpha \vec{e}_z \times \vec{r} + \omega \vec{e}_z \times [\omega (r_x \vec{e}_y - r_y \vec{e}_x)] \\ &= \alpha \vec{e}_z \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_m \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \vec{a}_t = \alpha \vec{e}_z \times \vec{r} & ; \quad a_t = \alpha r \\ \vec{a}_m = -\omega^2 \vec{r} & \quad a_m = \omega^2 r \end{cases}$$

Equações que definem a rotação:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \cdot \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \omega$$

Rotação uniforme: $\alpha = 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \omega = \text{constante} \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega t}$$

Rotação uniformemente acelerada: $\alpha = \text{constante}$

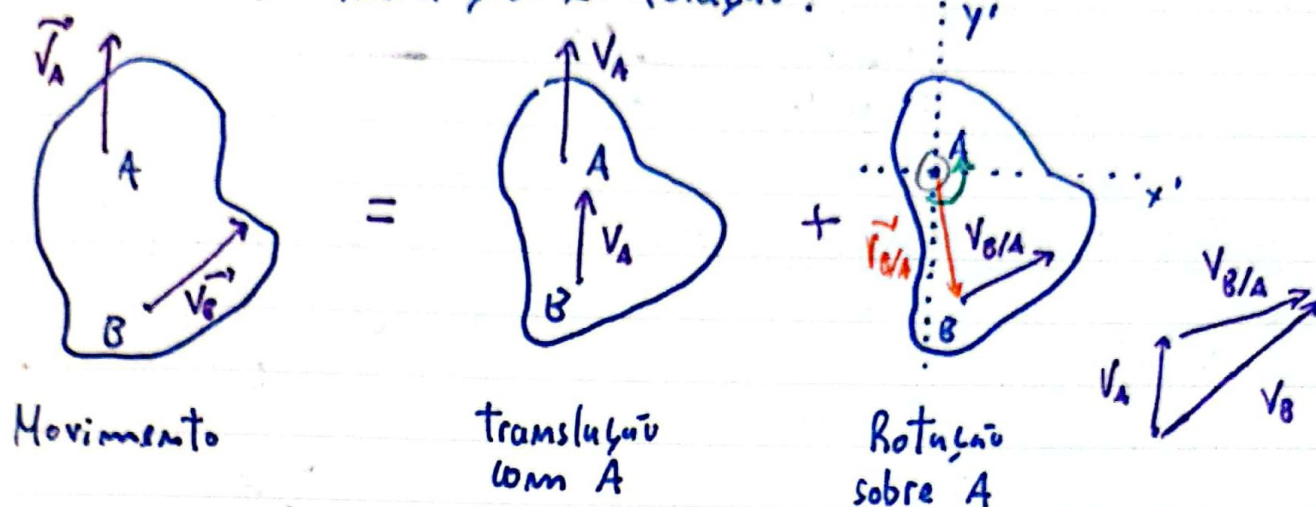
$$\Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Velocidade absoluta e relativa no movimento plano:

"Um movimento plano geral pode ser sempre considerado como a soma de uma translação e rotação."



$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} \quad \text{ou} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

Aceleração absoluta e relativa no movimento plano:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_t + (\vec{a}_{B/A})_n$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A})$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}$$

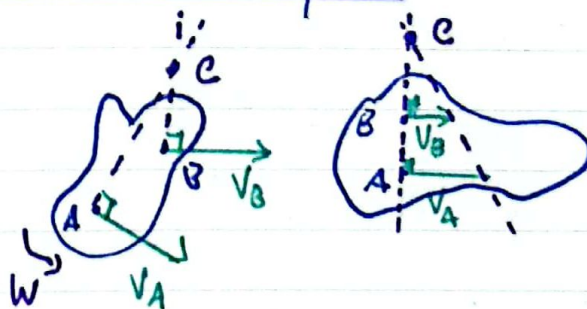
Centro instantâneo de rotação no movimento plano:

$$\text{Se } v_C = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C} \Rightarrow v_A = \omega \cdot r_{A/C}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/C} \Rightarrow v_B = \omega \cdot r_{B/C}$$

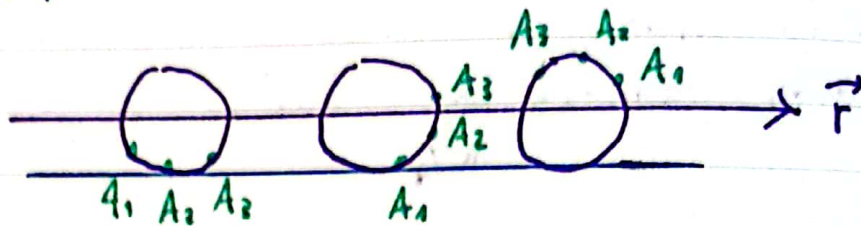
$$\Rightarrow \omega = \frac{v_A}{r_{A/C}} = \frac{v_B}{r_{B/C}}$$



O ponto C é definido como centro instantâneo de rotação

O mesmo se verifica para qualquer ponto, não apenas A e B

• O centro instantâneo de rotação apresenta velocidade nula mas a aceleração não tem de ser nula.

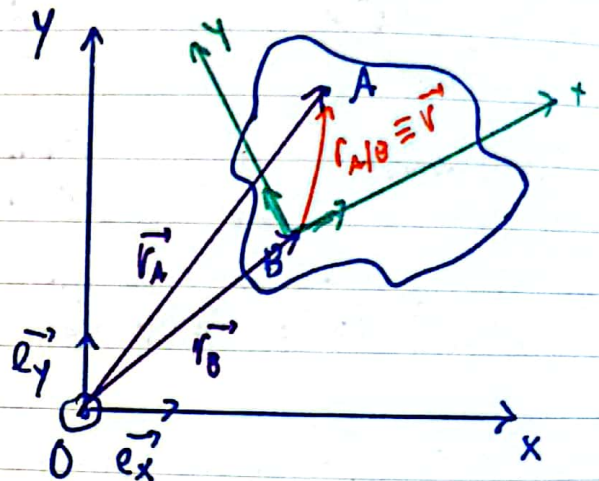


Movimento em relação a um referencial em rotação:

Tanto $\vec{r}_A$ como $\vec{r}_B$ costumam ser escritas no ref. fixo XY

$$\vec{r} = \vec{r}_{AB} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \quad \left(\begin{array}{l} \text{escrito no} \\ \text{ref. em} \\ \text{rotação} \end{array} \right)$$

Logo ao derivar $\vec{r}$ é preciso ter em conta as derivadas dos versores:



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [x \vec{e}_x + y \vec{e}_y]$$

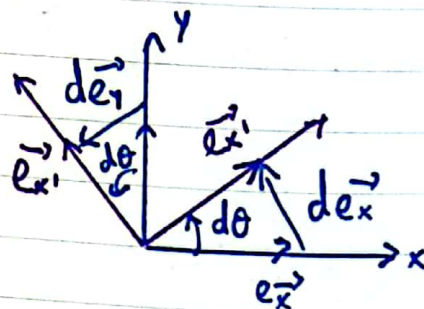
$$= \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + x \frac{d\vec{e}_x}{dt} + y \frac{d\vec{e}_y}{dt}$$

$$= \dot{\vec{r}} + x \frac{d\vec{e}_x}{dt} + y \frac{d\vec{e}_y}{dt}$$

Ao rodar o referencial a derivada dos versores fica:

$$d\vec{e}_x \approx d\theta \vec{e}_y$$

$$d\vec{e}_y \approx -d\theta \vec{e}_x$$



$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_x}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_y = \omega \vec{e}_y = \vec{\omega} \times \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_y}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_x = -\omega \vec{e}_x = \vec{\omega} \times \vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}' + x \vec{\omega} \times \vec{e}_x + y \vec{\omega} \times \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}' + \vec{\omega} \times [x \vec{e}_x + y \vec{e}_y]$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Conclusão:

$$\boxed{\vec{V}_A = \vec{V}_B + \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}}_{\text{rotação do referencial}}$$

$\vec{V}_A$ - vel. absoluta A
(em XYZ)

$\vec{V}_B$ - vel absoluta B
(em XYZ)

$\dot{\vec{r}}'$ - derivada das componentes
do vetor $\vec{r}'$
(em ref. rodado)

$\vec{\omega} \times \vec{r}$ - derivada dos versores de
 $\vec{r}$
(em ref. rodado)

Cálculo da aceleração: apenas está representado o resultado final

$$\boxed{\vec{a}_A = \frac{d\vec{V}_A}{dt} = \vec{a}_B + \ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]}$$

$\vec{a}_A$ - aceleração absoluta A
(em XYZ)

$\vec{a}_B$ - aceleração absoluta B
(em XYZ)

$\ddot{\vec{r}}'$ - segunda derivada das
componentes de $\vec{r}'$
(em ref. rodado)

$2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$ - aceleração de Coriolis

$\vec{\alpha} \times \vec{r}$ - aceleração tangencial

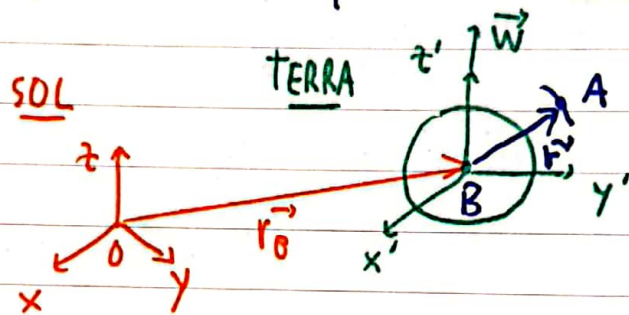
$\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]$ - aceleração normal
ou centrípeta

Notas:

1) Se $\ddot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

2) $\vec{V}_A = \underbrace{\vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\vec{V}_{A'}} + \underbrace{\dot{\vec{r}}'}_{\vec{V}_{A/R}} = \vec{V}_{A'} + \vec{V}_{A/R}$

3) No caso do planeta Terra $\vec{V}_{A/R} = \dot{\vec{r}}'$ é de facto a "velocidade" medida por um observador



Corpo elástico

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \dot{\vec{r}}'$$

$V_{\text{translação do ponto A em relação ao sol}} = V_{\text{translação da Terra em relação ao Sol}} + \text{Velocidade de rotação do ponto A em relação à Terra} + \text{velocidade linear A em relação à Terra}$

Outros motus:

1) se o ponto A não tiver movimento em relação a B, ou seja, ao referencial rodado logo:

$$\vec{r}' = \text{constante} \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = 0 = \ddot{\vec{r}}'$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

2) Se o ponto A não tiver aceleração relativo ao ref. rodado $\Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = 0$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B + 2\vec{\omega} \times \vec{r}' + (\vec{\alpha} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

3) No caso de um projétil com vel. constante

$$\vec{\omega} = \text{const.}$$

130

$$\Rightarrow (x \times \vec{r}) \cdot \vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) \simeq 0$$

$$\therefore f_1 = 0$$

$$2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_A = \underbrace{\vec{a}_B}_0 + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

$$F = m \vec{a}' = \underbrace{2m \vec{\omega} \times \vec{r}}_{\text{force de Coriolis}}$$

Se $\ddot{r} \neq 0$ $F = m \ddot{a}_x = m \ddot{\vec{r}} + 2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$

Exemplo:

$$V_p = 2 \text{ m/s}$$

W_{ABD} ? W_{DE} ?

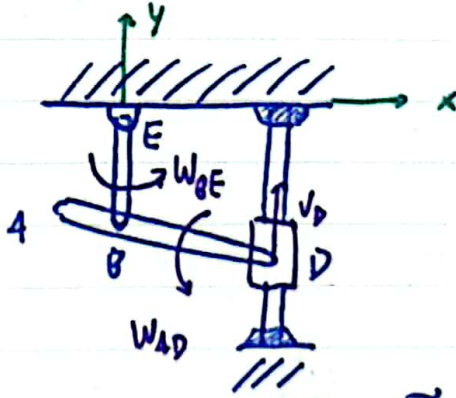
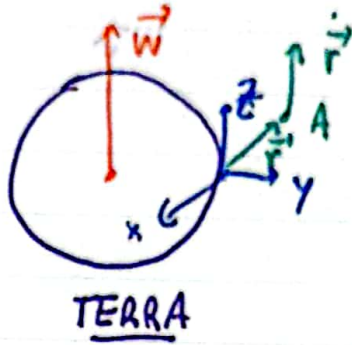
$$\begin{aligned}\vec{V}_B &= \vec{V}_E + \vec{\omega}_{BE} \times \vec{r}_{B/E} \\ &= +0,192 \omega_{BE} \vec{e}_x\end{aligned}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_D + \vec{\omega}_{AD} \times \vec{r}_{B/D}$$

$$= -0,36 W_{49} \sin 30 \vec{e}_x + (2 - 0,36 W_{49} \cos 30) \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,192 W_{BE} = -0,18 W_{AD} \\ 0 = 2 - 0,36 W_{AD} \cos 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{BE} = -6 \text{ rad/s} \\ \omega_{AD} = 6.415 \text{ rad/s} \end{cases}$$

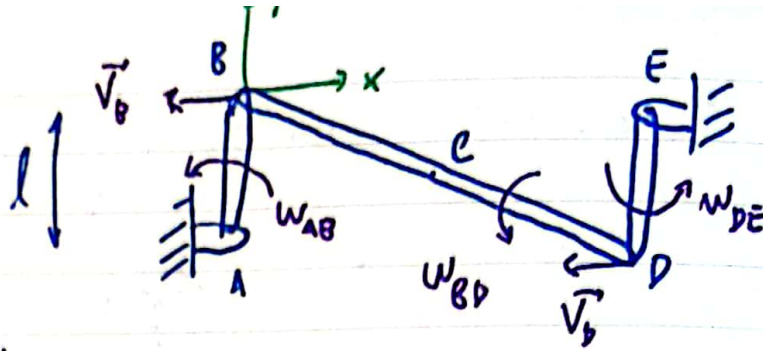


Exemplo:

$\omega_{BD}?$

$$V_B \parallel V_D \Rightarrow \omega_{BD} = 0$$

$$V_B = l \omega_{AB} = V_D = -l \omega_{DE} \\ \Rightarrow \omega_{DE} = -\omega_{AB}$$

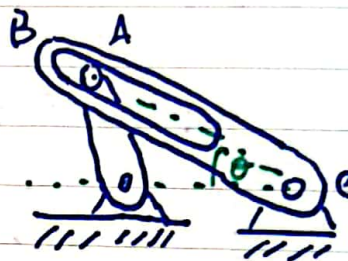


Exemplo:

$\omega_{CB}?$

$$V_A = \underset{0}{V_C} + \dot{r}_{A/C} + \omega_{BC} \times \vec{r}_{A/C} \\ = \dot{r} \vec{e}_x - 0,2 \omega_{BC} \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1,73 = \dot{r} \\ \omega_{AC} = 5 \text{ rad/s} \end{cases}$$

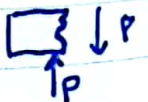
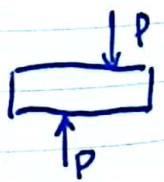


$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \omega_{OA} \times \vec{r}_{A/O} \\ = -0,2 \cos \theta \omega_{OA} \vec{e}_y - 0,2 \omega_{OA} \sin \theta \vec{e}_x \\ = -\vec{e}_y - 1,73 \vec{e}_x \quad (\theta = 60^\circ)$$

Tensão de corte média e tensão de esmagamento

$$\tau_{media} = \frac{P}{A}$$

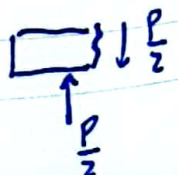
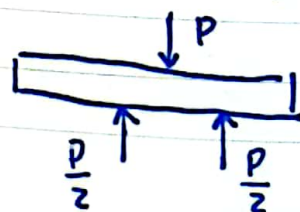
Corte simples: $\tau_{media} = \frac{F}{A}$



tensão esmagamento $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{F_{pino}}{td}$



Corte duplo: $\tau_{media} = \frac{F}{2A} = \frac{F}{2A}$



Calcular tensões só com medidas (Ficha 1)

1º Calcular os vetores dos cubos de tensão em componentes ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$)

2º Fazer $t_{AB} = \lambda_{AB} t_{AB} = t_{AB} \frac{\vec{AB}}{AB}$ Calcular vetor da tensão

3º Fazer $\Sigma F = 0$ para todas as componentes

$$t_{AC} = t_{AB} \lambda_{AB} \lambda_{AC}$$

Calcular momento de uma tensão AE em torno de uma linha AB (ficha 2)

1º Calcular $T_{AE} = T_{AE} \lambda_{AE}$

2º Calcular λ_{AB}

$$3^\circ M_{AB} = \begin{vmatrix} \lambda_{ABx} & \lambda_{AB y} & \lambda_{AB z} \\ AE_x & AE_y & AE_z \\ T_{AE x} & T_{AE y} & T_{AE z} \end{vmatrix}$$

Determinar passo e eixo do tórsor (ficha 2)

1º Calcular $\Sigma \vec{F}$ (força resultante)

2º Calcular M_0^R (momento na origem da força resultante)

3º Calcular $\lambda_{axis} = \frac{\vec{R}}{R}$

4º $M_1 = \lambda_{axis} \cdot M_0^R$ (M_1 é o eixo do tórsor)

5º $P = \frac{M_1}{R}$ (P é o passo do tórsor)

Calcular intervalo de valores para o qual o carregamento é seguro (com tensões) (ficha 3):

1) Ver para quando $t > 0$ e para quando $t < t_{máx}$

Calcular Momentos (ficha 2)

1º Calcular componentes $\vec{F}_R$

2º Calcular componentes do vetor $\vec{R}$ (desde local do momento até ao ponto de aplicação da força)

3º Fazer $M = F \times R$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \vec{R}_x & \vec{R}_y & \vec{R}_z \\ \vec{F}_x & \vec{F}_y & \vec{F}_z \end{vmatrix}$$

e resolver sentido horário $\{ M < 0$
ou

1º $M = Fd$ braco da força (Calcular distância perpendicular da força ao ponto)

Calcular as duas forças verticais que criam binário (ficha 2)

1º Escolher um dos pontos com uma das forças de binário para calcular momento

Calcular sistema força-binário equivalente (ficha 2)

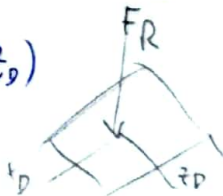
1º Escolher um ponto e calcular $\Sigma M = 0$ desse ponto $\Leftrightarrow M + F_1 \times R + F_2 \times R \dots = 0$

Determinar Ponto de aplicação (ficha 2)

1º Determinar Força resultante $F_R = F_1 + \dots + F_n$

2º $\Sigma M_x: F_1(z_1) + \dots + F_n(z_n) = F_R(z_0)$

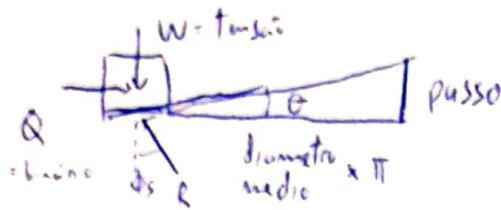
3º O mesmo para ΣF_y e ΣF_z



Atrito (Hichin +)

Parafusos:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\mu_{\text{passo}}}{d_{\text{medida}}} \right)$$



$$Q = W \tan(\theta + \phi_s)$$

$$\text{Torque} = \frac{d}{2} Q$$

Seção Anular

$$M = \frac{2}{3} \mu_s N \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$



Quando dois corpos se tocam (ou mais)

1º Dividir os vários corpos e fazer diagramas de corpo livre (Mostrar R e ϕ_s)

2º Fazer triângulo de forças sempre que possível

3º Lembrar que $F_{\text{max}} = \mu_s N$ (em iminência)
e $F_{\text{atual}} = \mu_k N$ (em movimento)

4º $\phi_k \rightarrow$ para manter o movimento

$\phi_s \rightarrow$ manter na iminência (equilíbrio)

$$\phi_s = \arctan(\mu_s)$$

Veios:

1º Calcular forças aplicadas

2º Definir D no veio

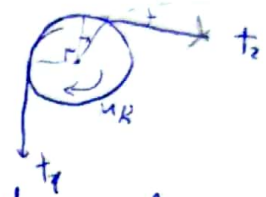
3º Calcular ΣM_D em ordem a R

4º Usar $r \sin \phi_s = r \mu_s = r f$



Cintas:

$$\frac{t_2}{t_1} = e^{\mu \theta}$$

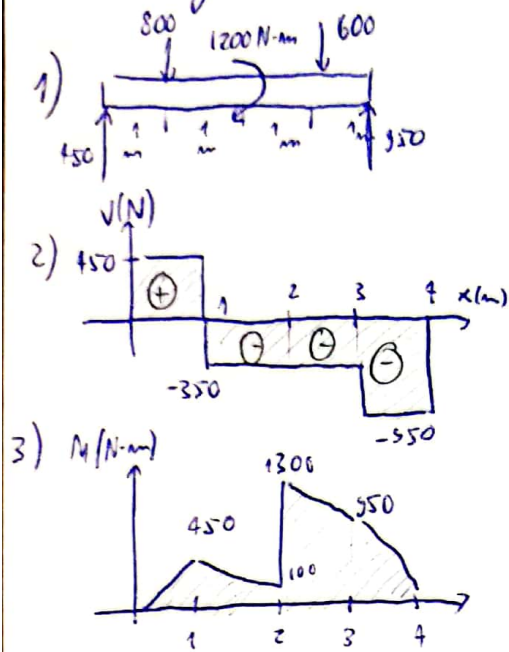


1º Calcular ϕ_s e definir R

2º Resolver $\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$, chegar a T_2 ou t_1

3º Resolver $\frac{t_2}{t_1} = e^{\mu \theta}$

Calcular diagrama esforço transverso e momento fletor (sem correçamentos) (ficha 4)



$$\Delta M = \int V dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

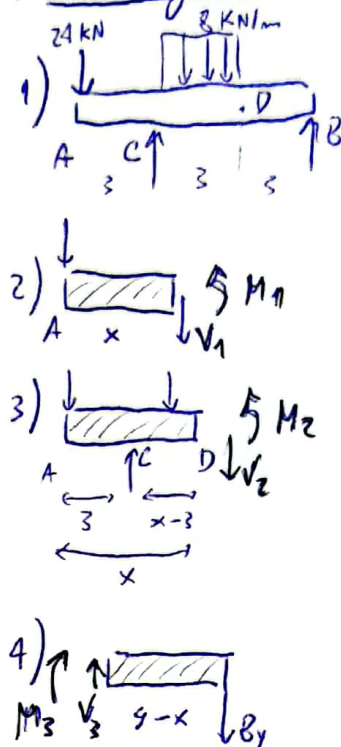
Método dos nós (ficha 5):

1º Calcular com momentos o máximo de forças possível

2º Calcular forças nó a nó fazendo $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$

ou
lei dos senos com triângulo de forças

Calcular diagrama esforço transverso e momento fletor (com correçamentos) (ficha 4)



Correçamentos (ficha 4)

1) Calcular Área
(= Força)

2) (hoger ao centroide
($x \sum R = x R_1 + \dots + x R_n$)

3) Resolver um problema
normal de momentos

$$F_A = \int_{x_0}^{x_1} w(x) dx$$

$$M = \int_{x_0}^{x_1} x w(x) dx$$

Máximas (ficha 6)

1º Calcular o máximo de cisar com a máxima taxa

2º Dividir em corpos e calcular o máximo de cisar

Momentos de Inércia: (técnica 10)

1) Fazer tabela

	A	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}A$	$\bar{y}A$
1					
...					
Σ					

Para chegar ao

centroide: $\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x}A}{\Sigma A}$ $\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}A}{\Sigma A}$

2) Calcular momentos de Inércia (I_x, I_y)

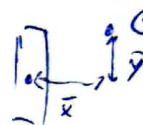
$$\bar{I}_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 + \dots + (I_x)_n$$

Passar pelo centroide
ou usar regra dos
eixos paralelos

Para cada corpo: $\bar{I}_{x'} + A_n \bar{y}^2 \rightarrow$ distância em do centro de um ao centroide
usar fórmula

2) Calcular I_{xy}

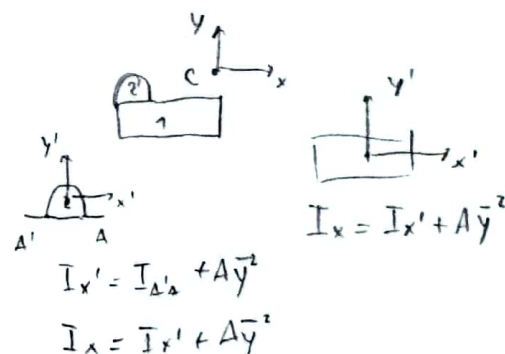
- Fazer tabela com base no referencial do Centroide



$$\bar{I}_{xy} = (I_{xy})_1 + \dots + (I_{xy})_n$$

Para cada corpo: $I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A_n$

$$\bar{I}_{x'y'} = 0 \text{ (simétrico)} \Rightarrow \bar{I}_{xy} = \Sigma \bar{x}\bar{y}A$$



$$V_B = V_A + V_{B/A}$$

$$V_B = V_A + \omega_K \times r_{B/A}$$

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

$$a_B = a_A + \alpha \times r_{B/A} - \omega^2 \cdot r_{B/A}$$

$$V = V_0 + at$$

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

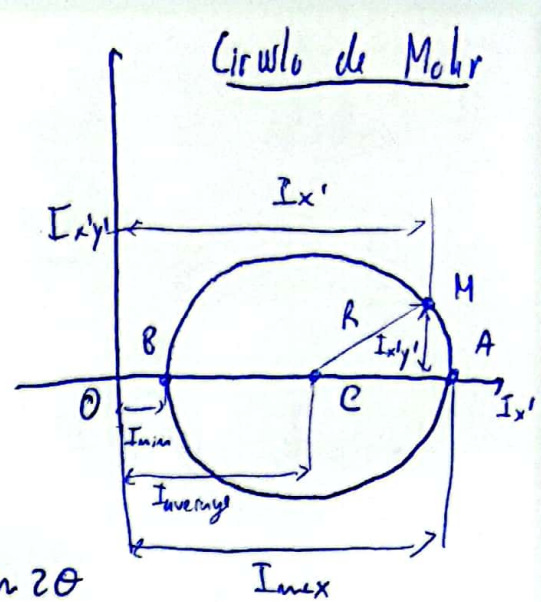
Centro de rotação instantânea

Momentos de inércia para referências rodadas:

$$I_{x'} = \cos^2 \theta I_x + 2 \sin \theta \cos \theta I_{xy} + \sin^2 \theta I_y$$

$$I_{y'} = \cos^2 \theta I_y - 2 \sin \theta \cos \theta I_{xy} + \sin^2 \theta I_x$$

$$I_{x'y'} = \sin \theta \cos \theta (I_y - I_x) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) I_{xy}$$



Outras fórmulas:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = -\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

→ Momento máximo e mínimo de inércia: Momentos principais de inércia

→ Eixos que passam por O e representam os seus valores máximos e mínimos perpendiculares entre si: Eixos principais de inércia

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x - I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \rightarrow I'_{ij} = \begin{bmatrix} I_{\min} & 0 \\ 0 & I_{\max} \end{bmatrix}$$

valores próprios de I_{ij}

A 3D é:

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

Momento de Inércia:

$\alpha = \frac{M}{I}$ (biacção) $\rightarrow I = \frac{M}{\alpha}$ $\rightarrow I = \frac{M}{\omega^2}$ $\rightarrow I = m r^2$
 é uma medida da inércia do corpo ao movimento de rotação



1) Centroides de linhas:

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L} ; \bar{y} = \frac{\int y dL}{L} ; \bar{z} = \frac{\int z dL}{L}$$

$$\rho = m/V$$

↓
densidade
superfície → constante

2) Centroides de superfícies:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} ; \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} ; \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$

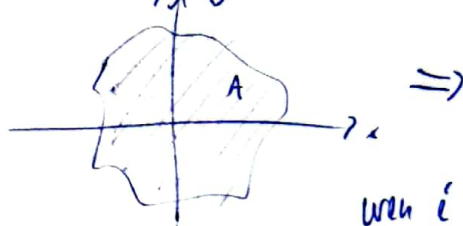
$\int x dA \rightarrow$ Momento estático de 1ª ordem em relação ao plano yz

"
O logo o centróide tá num dos eixos coordenados

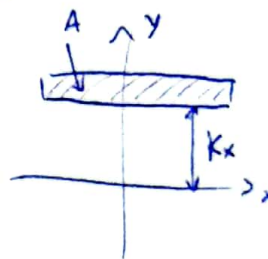
Momento polar

$$I_o = \int_A \rho^2 dA$$

Área de giração da superfície:



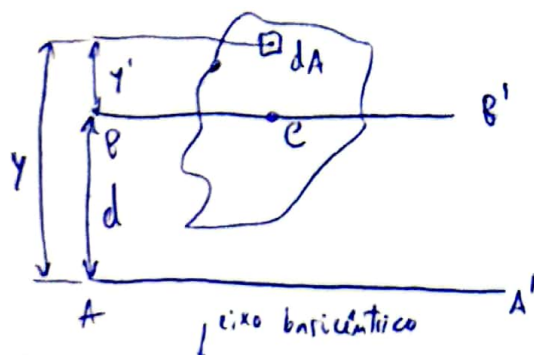
ou é igual



$$I_x = k_x^2 \cdot A$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

Teorema dos eixos paralelos



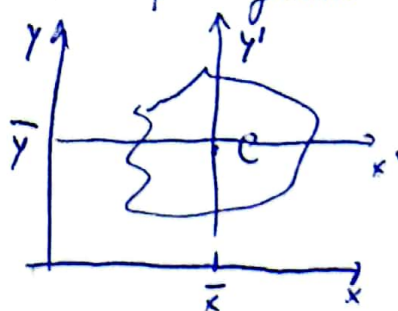
$$I_{x'A'} = I_{c c'} + A d^2$$

Para os eixos de giração

$$\Rightarrow k^2 = \bar{k}^2 + d^2$$

AA' cc'

De forma genérica

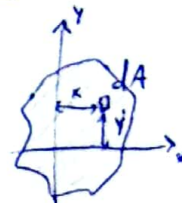


$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_{x'} + A \bar{y}^2 \\ I_y &= \bar{I}_{y'} + A \bar{x}^2 \end{aligned}$$

existem ainda as formulas em 3D

Produto de inércia:

$$I_{xy} = - \int xy dA$$



Tensor de inércia

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

Módulo de inércia:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A \bar{y}^2$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + A \bar{x}^2$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} - A \bar{x} \bar{y}$$

