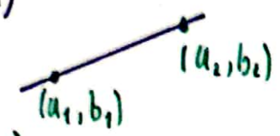
Cálculo II → aplicar conceitos de CDI 1 a mais dimensões

▪ Limites e Continuidade

· Revisões em $\mathbb{R}^2$

→ **Reta**

1)



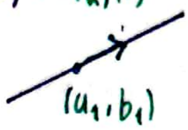
$V = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$

↓

declive: $m = \dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$

$y - b_1 = m(x - a_1)$

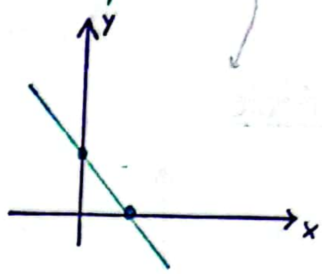
2) $v = (\alpha, \beta)$



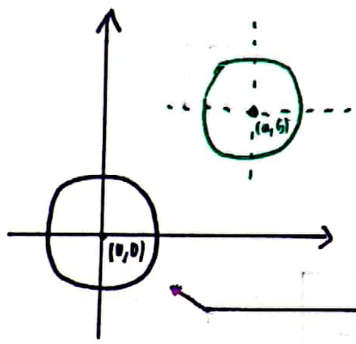
↓

$(x, y) = (a_1, b_1) + \lambda(\alpha, \beta), \lambda \in \mathbb{R}$

3) ex: $y = 1 - x$



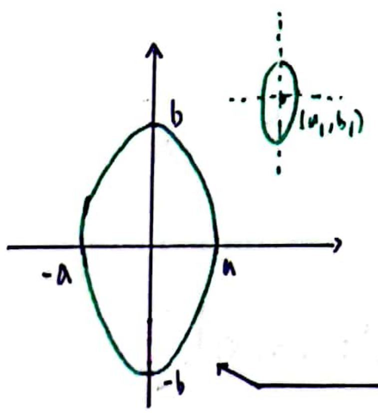
→ **Circunferência**



$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

→ **Elipse**



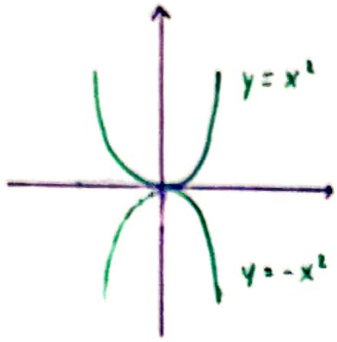
$$\boxed{\frac{(x-a_1)^2}{a^2} + \frac{(y-b_1)^2}{b^2} = 1}$$

$a = b$
$\Rightarrow$ circunferência

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow u = \frac{x}{a}, \ v = \frac{y}{b}$$

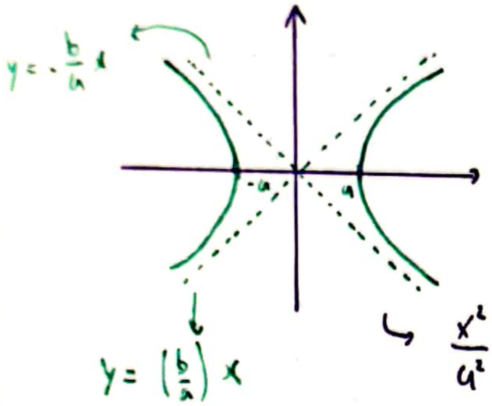
(transformar elipse numa circunferência)

→ Parábola



$$\boxed{(y-b) = K(x-a)^2}$$

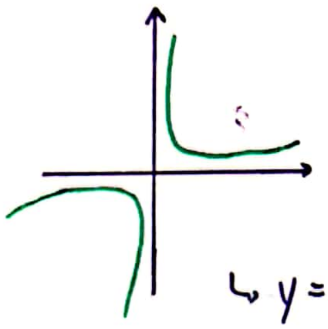
→ Hipérbole



$$\boxed{\frac{x^2 - a_1}{a^2} - \frac{y^2 - b_1}{b^2} = 1}$$

↳ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | se $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ for o caso:

→ Outra hipérbole

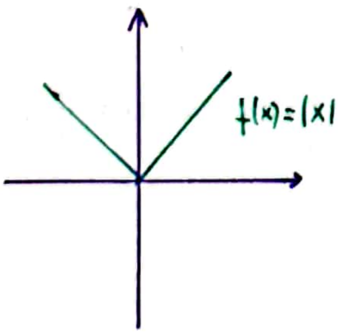


$$\boxed{y - b_1 = \frac{1}{x - a_1}}$$

↳ $y = \frac{1}{x}$

→ Módulo

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

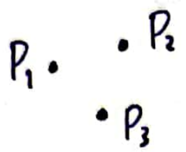


$\text{graf}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$

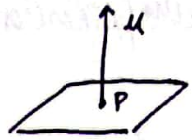
Linhas de superfície conhecidas em $\mathbb{R}^3$

→ Plano

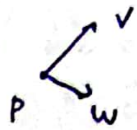
1)



2)



3)



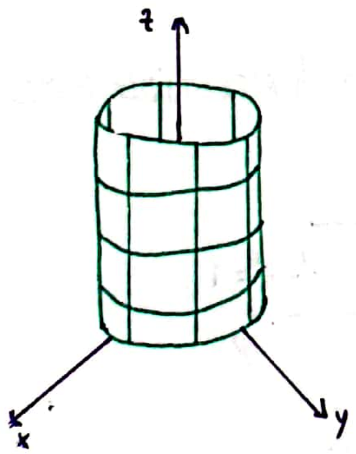
eq cartesiana: $ax+by+cz+d$

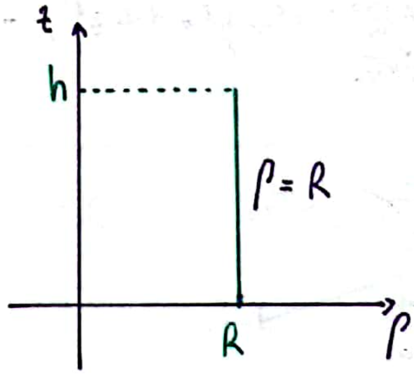
eq reta: $(x,y,z) = p + \lambda v + \mu w$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

→ Cilindro

Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=R^2;\ 0 < z \leq h\}$ a superfície cilíndrica de raio R, altura h e representada na figura abaixo.

$$\begin{cases} x^2+y^2=R \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

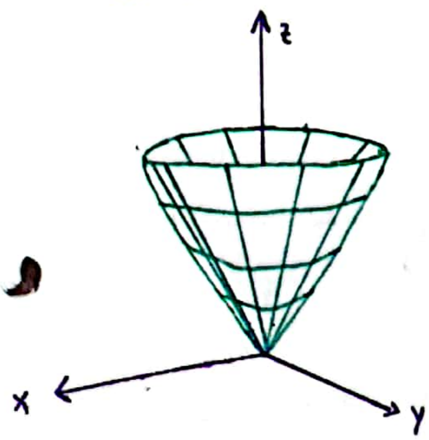


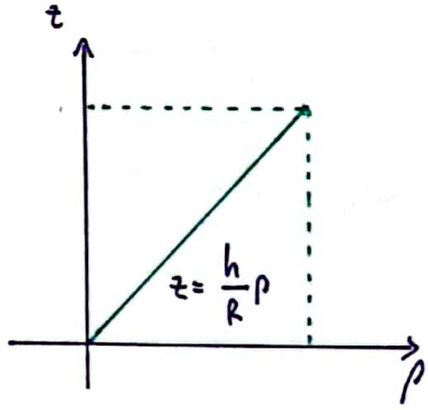


→ Cone

Seja $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2};\ z \leq h\}$ o cone de altura h com raio da base R e representado na figura abaixo.

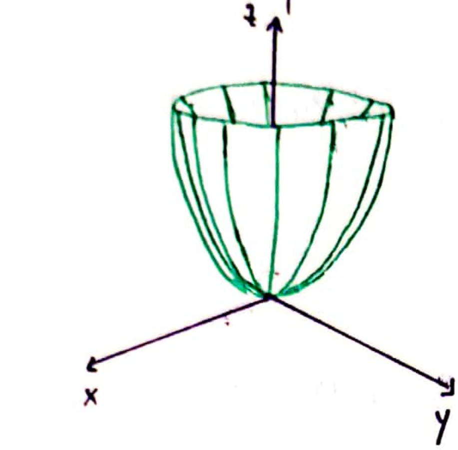
Nota: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

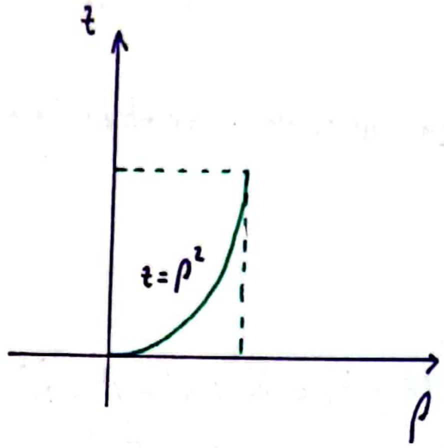




Parabolóide

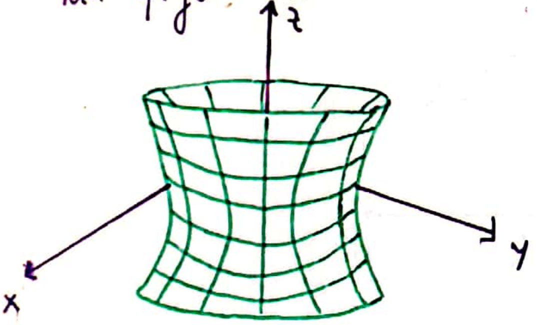
Seja $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2\}$, sendo P definido pela equação $z = \rho^2 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{z}$ em cada plano dado por $z = z_0$, em que $0 \leq z_0 \leq h$ é uma circunferência de raio $\sqrt{z_0}$ e centro no ponto $(0, 0, z_0)$

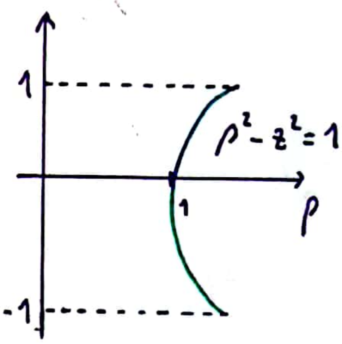




Hiperbolóide de uma folha

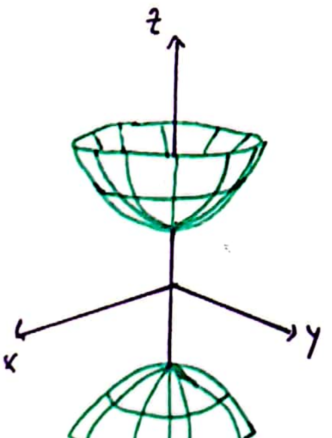
Seja $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1+z^2 \, ; \, -1 \leq z \leq 1\}$ o hiperbolóide representado na figura abaixo.

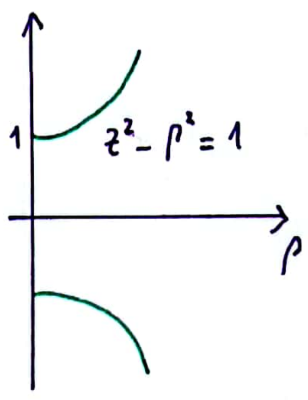




Hiperbolóide de duas folhas

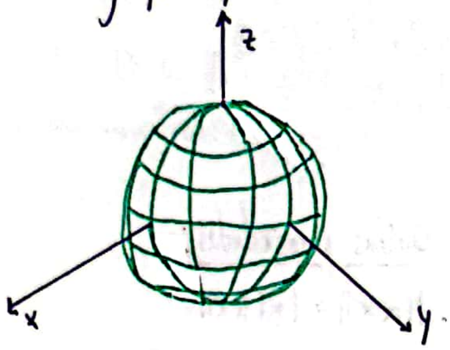
Seja $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2-1\}$ o hiperbolóide representado

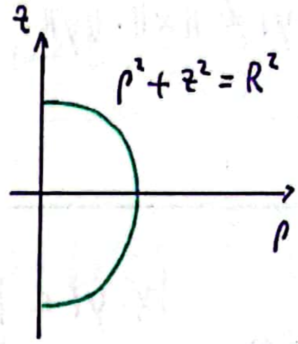




Esfera

Seja $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ representada abaixo



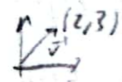


Definição

A norma de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é o escalar

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$$

ex:



$\|v\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

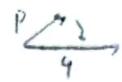
Nota: Vetor Unitário, $x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1$

Definição

O produto interno entre um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ e um vetor $y \in \mathbb{R}^n$ é:

$$\underbrace{x \cdot y}_{\langle x,y\rangle} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ex:
$p(1,0,2)$
$q(0,1,3)$
$p \cdot q = 6$



Definição

1. Chama-se distância entre dois pontos x e y em $\mathbb{R}^n$ ao escalar

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$

→ Em $\mathbb{R}$

2. Chama-se bola de centro num ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $R>0$ ao conjunto dos pontos que se encontram a uma distância de a inferior a R, ou seja, ao conjunto:

$$B_R(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < R\}$$

→ bola fechada $\bar{B}_R(a)$ $\leq$

$B_R(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| = R\}$

↓

São dois pontos

Em $\mathbb{R}$: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Em $\mathbb{R}^n$: $|x \cdot y| \neq \|x\| \cdot \|y\|$ $\rightarrow$ ex: $|(0,1) \cdot (1,3)| = 3$

$\|(0,1)\| = 1$ (contra exemplo)

$\|(1,3)\| = \sqrt{10}$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz $\quad |x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Outras propriedades:

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdade triangular)
- $\|x\| \geq 0$

Definição

Seja $D \subset \mathbb{R}$

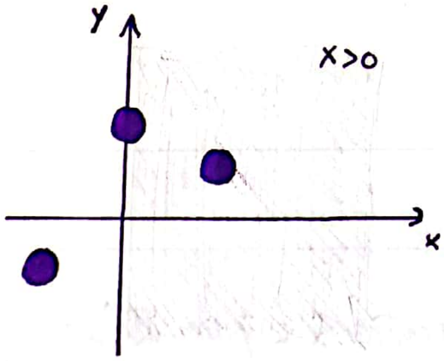
i) Diz-se que $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior a D, se $\exists_{R>0}: B_R(a) \subset D$

ii) Diz-se que $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto exterior a D, se $\exists_{R>0}: B_R(a) \subset D^c$

iii) Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ diz-se ponto fronteiro a D, se

$$\forall_{R>0}: B_R(a) \cap D \neq \emptyset \wedge B_R(a) \cap D^c \neq \emptyset$$

ex:



a) $int(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

$ext(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$

$\partial(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

Definição

a) Diz-se que D é aberto, se $D = int(D)$

b) Diz-se que é fechado, se $D = int(D) \cup \partial D$

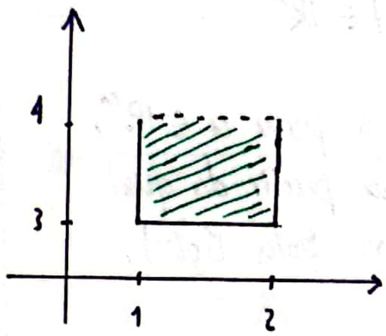
c) Ao conjunto $\bar{D} = int \cup \partial D$ chama-se fecho do conjunto D

Proposição

$D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se fechado se $\mathcal{C}(D)$ for um conjunto aberto

$D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se aberto se $D = \dot{D}$

ex:



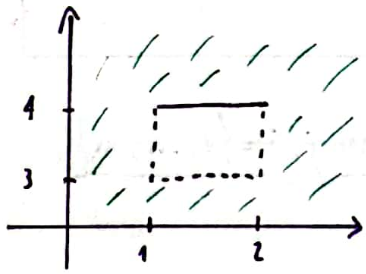
$D = [1,2] \times [3,4[$

$\dot{D} =]1,2[\times]3,4[$

$\dot{D} \neq D \Rightarrow D$ não é um conjunto aberto

Porque D não é um conjunto fechado? (duas opções)

1)



$\mathcal{C}(D)$ ñ é um conjunto aberto

$\Rightarrow D$ ñ é um conjunto fechado

2)

∂D = 4 segmentos de reta

$\partial D \not\subset D$

$\Rightarrow D$ ñ é um conjunto fechado

ex: $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$

aberto ou fechado?

$\dot{A} = \emptyset$

A ñ é aberto

$\partial A = A \Rightarrow A$ é um conjunto fechado

Nota:

$\mathbb{R}^n = \text{int}(D) \cup \partial D \cup \text{ext}(D)$

Digitalizada com CamScanner

Sucessões em $\mathbb{R}^n$

Definição

1. Uma sucessão (x_k) de termos em $\mathbb{R}^n$, é uma função que a cada $k \in \mathbb{N}$ faz corresponder um vetor

$\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^n$
$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$$

2. Diz-se que uma sucessão (x_k) converge para $a \in \mathbb{R}^n$, se, dado $\delta > 0$, existe uma ordem k_0 a partir da qual os termos da sucessão se encontram na bola $B_\delta(a)$, ou seja

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{k_0} : k > k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \delta$$

Neste caso escreve-se $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a$ ou $x_k \to a$

→ Sucessão coordenada de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ de ordem j, $j = \{1, \dots, m\}$

$$\{u_{nj}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$$

$u_n = (0, \frac{1}{n}, n^2)$ – Ñ é convergente ($\lim n^2 = +\infty$)

$\subset \mathbb{R}^3$

$\{u_{n1}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ $u_{n1} = 0$ sucessão coordenada de ordem 1

$\{u_{n2}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ $u_{n2} = \frac{1}{n}$ sucessão coordenada de ordem 2

$\{u_{n3}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ $u_{n3} = n^2$ sucessão coordenada de ordem 3

Notação: $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\{u_n\}$

Proposição

Dada $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} \subset \mathbb{R}^m$ e $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$

Logo $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{R}^m} u$ se e só se $u_{n_j} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{R}} u_j$

Teorema

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^m$ é fechado, se e só se os limites das suas sucessões convergentes estiverem em D

Funções definidas em $\mathbb{R}^n$

se $m = n \to$ campo vetorial $(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$

se $m = 1 \to$ campo escalar $(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$

Definição

Dada uma função $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, o gráfico de f é o conjunto:

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y = f(x) ; x \in D\}$$

Definição

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar. A um conjunto definido por:

$$N(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \alpha\}$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$, chama-se conjunto de nível α da função

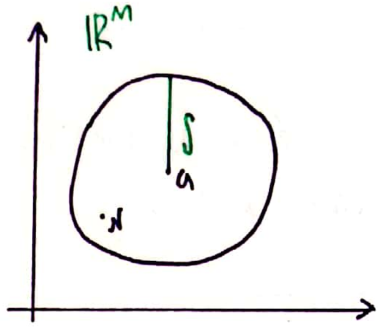
ex: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-1=0\}$ é o conjunto nível 0 da função $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

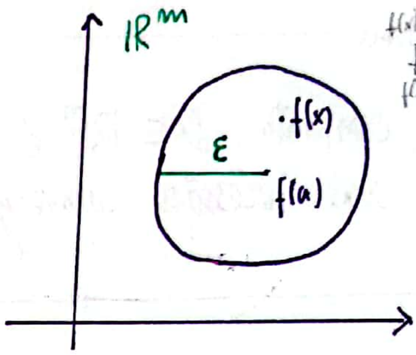
Definição

Uma função $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in D$, se

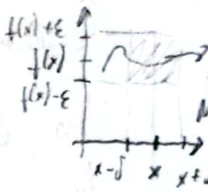
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D: \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Note-se que $\|x-a\|$ é calculada em $\mathbb{R}^n$ e $\|f(x) - f(a)\|$ é calculada em $\mathbb{R}^m$





em cdi:



tem de estar na faixa

Todos os valores têm de estar na bola para ser contínua

teorema

Uma função $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in D$, se e só se, para qualquer sucessão (x_k), de termos em D, tal que $x_k \to a$, $f(x_k) \to a$

teorema

Sejam $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

a) A função αf é contínua

b) A função $f+g$ é contínua

c) A função fg é contínua

d) A função f/g é contínua nos pontos x, em que $g(x) \neq 0$

e) Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua no ponto $a \in A$, e seja também $g: B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ uma função em que $f(A) \subset B$ e que é contínua em $f(a)$. Então, a função composta $g \circ f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é cont. em a

Exemplo: (Cálculo de limite)

Seja $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

i) Pelas propriedades das funções contínuas, f é contínua em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

ii) A fronteira de D é o conjunto $\{(0,0)\}$. A função f pode ser prolongada por continuidade à origem. De facto para $y = mx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{\sqrt{1+m^2}} = 0, \ \forall m \in \mathbb{R}$$

Assim, existe um candidato a limite. Usando a desigualdade:

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|x||y|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} = \|(x,y)\|$$

Portanto,

$$|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

A função $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$

A função $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é o prolongamento contínuo de $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$h(x,y,z) = (x, xy, e^{xyz}) \to$ se cada uma for contínua h é contínua

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se limitado, se existir uma bola centrada na origem que o contém, ou seja

$$\exists R > 0 : A \subset B_R(0)$$

Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, se for limitado e fechado

Definição

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que $a \in D$ é um ponto de máximo relativo de f, se existir uma bola $B_r(a)$, tal que $f(x) \leq f(a)$, para qualquer $x \in B_r(a)$. Se a desigualdade se verificar para todo $x \in D$, diz-se que $a \in D$ é um ponto de máximo absoluto

Teorema

Se $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ for uma função contínua e D um conjunto compacto, então a respetiva imagem $f(D) \subset \mathbb{R}^m$ é também um conjunto compacto.

Teorema Weierstrass

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e não vazio. Então qualquer função escalar contínua em D tem máximo e mínimos absolutos nesse conjunto.

- Funções diferenciáveis

Definição

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Diz-se que uma função $f: D \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável num ponto $a \in D$, se existir uma aplicação linear $Df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, denominada derivada de f em a, tal que $f(a+h) - f(a) - Df(a)h = o(h)$, sendo

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\|}{\|h\|} = 0$$

$$\lim_{(h,k) \to 0} \frac{f(a+(h,k)) - f(a) - \nabla f(a) \cdot (h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_k) - f(a)}{t} = Df(a)e_k$$

↳ derivada de f no ponto a segundo o vetor e_k.

Dado que

$a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$; $\quad a + te_k = (a_1, a_2, \dots, a_k + t, \dots, a_n)$

então a razão incremental

$$\frac{f(a+te_k) - f(a)}{t} = \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)}{t}$$

obtém-se, fixando todas as coordenadas, exceto a k-ésima.

Digitalizada com CamScanner

Sendo $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, então:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_k)-f(a)}{t} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{f_1(a+te_k)-f_1(a)}{t}, \dots, \lim_{t\to 0} \frac{f_m(a+te_k)-f_m(a)}{t} \right)$$

O conjunto de pontos definido por $\{a + te_k : t \in \mathbb{R}\}$ é a reta que passa pelo ponto a e com a direção do vetor e_k. Assim, a razão incremental

$$\frac{f_j(a+te_k)-f_j(a)}{t}$$

é a taxa de variação da função escalar f_j na direção do vetor e_k.

Definição

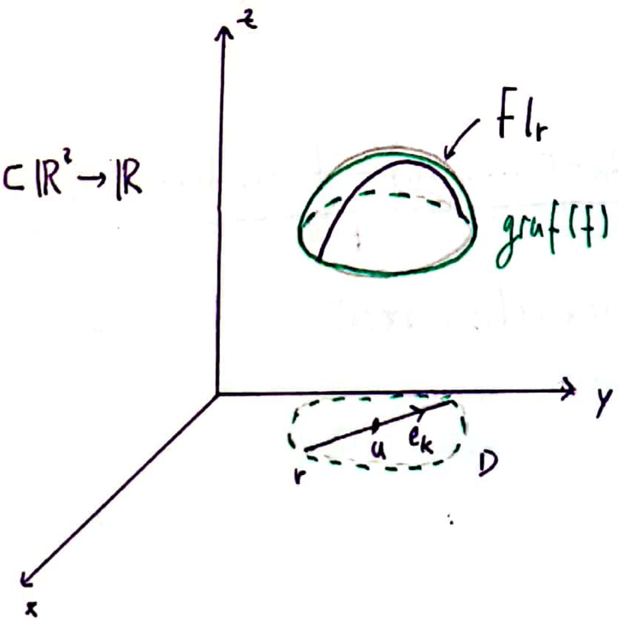
Ao limite:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f_j(a+te_k)-f_j(a)}{t}$$

chama-se derivada parcial de f_j no ponto a em ordem à variável x_k, sendo $k = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$.

ex:

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Fixado e_k:

"taxa de variação" de f no ponto a ao longo desta reta r

$\Downarrow$

Surge a ideia de derivada segundo um vetor

Portanto, a matriz que representa a derivada $Df(a)$ é

$$Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

À matriz $Df(a)$ chama-se jacobiana de f.
No caso em que $m=1$, ou seja, $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, então $Df(a)$ tem apenas uma linha:

$$Df(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right],$$

À representação na forma vetorial chama-se gradiente de f em a.
Este vetor passa a ser designado pelo símbolo $\nabla f(a)$, ou seja,

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

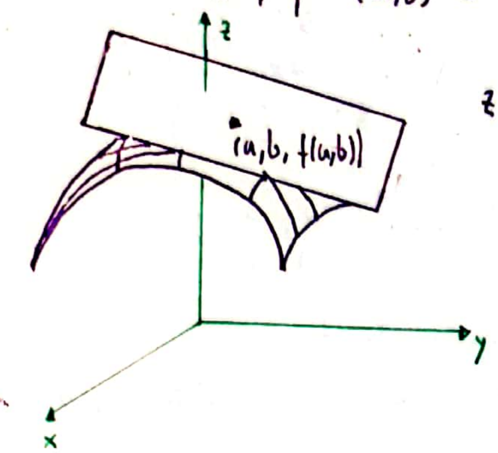
Assim, o gradiente de uma função escalar $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é também uma função que a cada ponto $x \in D$ faz corresponder um vetor $\nabla f(x)$, ou seja, é um campo vetorial $\nabla f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

ex: A jacobiana da função $f(x,y) = \left(\frac{x}{y}, \sin(xy), e^{x^2+y^2}\right)$ é a matriz de três linhas e duas colunas:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Derivada em $\mathbb{R}^2$. Interpretação geométrica

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p = (a,b) \in D$



$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

$$\Downarrow$$

equação do plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a,b))$

ex: ver se é ou não diferenciável

A função $f(x,y) = x$, definida em $\mathbb{R}^2$, é diferenciável em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$.

Prova: Seja (a,b) um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$. Fixando $y=b$ e derivando f como função apenas de x obtém-se:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 1}$$

Fixando $x=a$ e derivando f como função apenas de y, deduz-se:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0}$$

Portanto,

$$D_f(a,b) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right] = [1 \quad 0]$$

e

$$D_f(a,b)(h,k) = [1\ 0]\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = h$$

Assim,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - Df(a,b)(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{a+h-a-h}{\|(h,k)\|} = 0$$

e, portanto, f é diferenciável em (a,b)

A respetiva derivada é o gradiente $\nabla f(x,y) = (1,0)$

Digitalizada com CamScanner

Teorema (Derivada da Função Composta)

Se g for diferenciável no ponto a e f diferenciável no ponto $g(a)$, então $f \circ g$ é diferenciável no ponto a, e

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a))\, Dg(a)$$

Exemplo: Sejam $g, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$$

Esta função é diferenciável por ser a composição $f = g \circ h$ de funções diferenciáveis.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y) & & (u(x,y), v(x,y)) & & g(u(x,y), v(x,y)) \end{array}$$

, em que $h(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

$$\nabla f(x,y) = D_g(h(x,y))\, Dh(x,y)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) & \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

efetuando a multiplicação de matrizes, obtém:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Desta forma concisa de apresentar as derivadas parciais de $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$ retira-se uma mnemónica, chamada regra da cadeia, que evita escrever matrizes envolvidas. $\Rightarrow$ Regra geral para todas as funções

É a soma de duas parcelas resultantes das duas cadeias g, u, g e g, v, y (Neste caso, mas pode se aplicar noutras funções

Exemplo: Seja $f(x,y) = g(x-y, x+2y)$ em que $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável e tal que $\nabla g(0,3) = (3,2)$

Fazendo $h(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, em que $u(x,y) = x-y$ e $v(x,y) = x+2y$, a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a composição $f = g \circ h$, ou seja,

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\
(x,y) & & (u(x,y), v(x,y)) & & g(u(x,y), v(x,y)) \\
(x,y) & & (x-y, x+2y) & & g(x-y, x+2y) \\
(1,1) & & (0,3) & & g(0,3)
\end{array}
$$

Sendo $f(1,1) = g(0,3)$ e recorrendo à regra da cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial g}{\partial u}(0,3)\,\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial g}{\partial v}(0,3)\,\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{\partial g}{\partial u}(0,3)\,\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) + \frac{\partial g}{\partial v}(0,3)\,\frac{\partial v}{\partial y}(1,1)$$

e portanto $\nabla f(1,1) = (5,1)$

Definição (Funções de Classe C^1)

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Diz-se que uma função $f: D \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 se em cada ponto $x \in D$ as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ existirem e forem contínuas

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, e $f: D \to \mathbb{R}$, uma função de classe C^1. Então f é diferenciável

Teorema

Uma função ser diferenciável em $D \not\Rightarrow$ ser $C^1(D)$

Definição

Ao limite

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

em que $\|v\| = 1$, chama-se derivada direcional de f no ponto a segundo o vetor v.

Portanto,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \nabla f(a) v$$

Ou seja,

$$\boxed{D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v}$$

Nota

diferenciável $\Rightarrow$ contínua

ñ contínua $\Rightarrow$ ñ diferenciável

ter derivada $\not\Rightarrow$ diferenciável

Prova (do que está acima):

Sei que f é diferenciável em p se:

$$\lim_{x \to p} \frac{|f(x) - f(p) - J_f(p)[x-p]|}{\|x-p\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|f(p+hv) - f(p) - J_f(p)[hv]|}{\|hv\|} = 0$$

$x = p + hv$

$x \to p$

se $h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{\|v\|} \frac{f(p+hv) - f(p) - J_f(p)[hv]}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h} = J_f(p)[v]$$

$$\Rightarrow D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v$$

cqd//

Observação

Se $\exists v \in \mathbb{R}^n$:

$D_v f(p) \neq J_f(p)[v]$

então f não é diferenciável em p

Observação

$D_v f(p) = J_f(p) \cdot [v]$

$\not\Rightarrow f$ diferenciável em p, $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$D_v f(a) = \nabla f(a)\, v = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\, v_n$$

Assim, sendo $\|v\| = 1$, então:

$$D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v = \|\nabla f(a)\|\, \|v\| \cos\alpha = \|\nabla f(a)\| \cos\alpha$$

A derivada direcional é a maior possível no caso em que $\cos\alpha = 0$, ou seja, quando os vetores $\nabla f(a)$ e v são paralelos ou co-lineares.

Portanto, o vetor gradiente $\nabla f(a)$ determina a direção segundo a qual a derivada direcional de f em a é a maior possível.

ex: Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x^2 + xy$

Então,

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (2x+y, x)$$

e

$$\nabla f(1,1) = (3,1)$$

Portanto, no ponto $(1,1)$, o vetor $(3,1)$ determina a direção e o sentido de crescimento máximo da função f.

· Para $v = (1,2)$, tem-se $\|(1,2)\| = \sqrt{5}$, e a derivada direcional de f em $(1,1)$ na direção determinada por v, de acordo com a definição é dada por

$$D_v f(1,1) = \nabla f(1,1) \frac{v}{\|v\|} = (3,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

· A direção segundo a qual a derivada de f em $(1,1)$ é nula é determinada por um vetor $v = (v_1, v_2)$ ortogonal a $\nabla f(1,1)$, ou seja,

$$Df_v(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot (v_1, v_2) = 0 \iff (3,1) \cdot (v_1, v_2) = 0 \iff v_2 = -3v_1$$

Fazendo, por exemplo, $v_1 = 1$ obtém-se $v = (1,-3)$

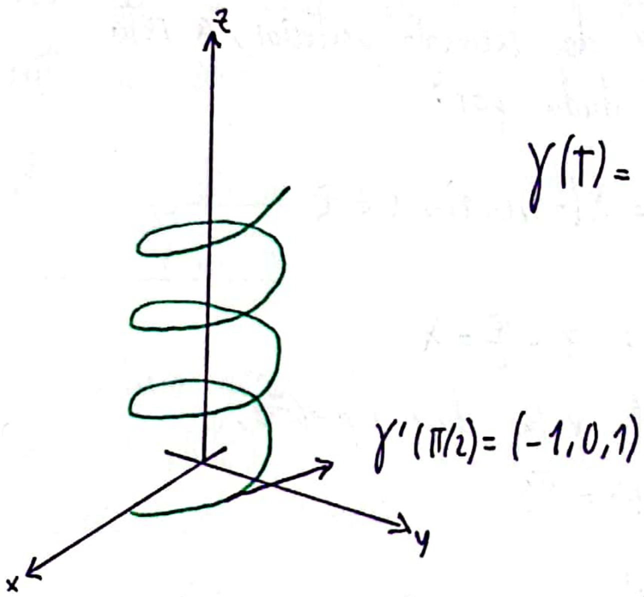
Linha. Vetor tangente

Exemplo:

Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a função definida por:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

Sendo $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ e fazendo $(\cos t, \sin t, t) = (x(t), y(t), z(t))$, fica claro que a imagem da função γ é uma linha assente sobre a superfície cilíndrica vertical de raio 1.



$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

→ hélice cilíndrica em $\mathbb{R}^3$

Definição (Linha)

Diz-se que um conjunto $T \subset \mathbb{R}$ é uma linha, se for imagem de uma função contínua $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. À função γ chama-se caminho ou trajetória

Definição (Vetor tangente)

Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e T a linha descrita por γ. Ao vetor

$$\gamma(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

chama-se vetor tangente à linha no ponto $\gamma(t)$

Definição

Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ uma linha descrita por uma função $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$

Seja $p \in \Gamma$ e $t_0 \in I$, tal que $p = \gamma(t_0)$

Seja $T = \gamma'(t_0)$ o vetor tangente a Γ em p

Chama-se reta tangente a Γ no ponto p ao conjunto,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x - p = \lambda T;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exemplo: Para a hélice cilíndrica do exemplo anterior, a reta tangente no ponto $(0, 1, \pi/2)$ é dada por:

$$(x, y, z) - (0, 1, \tfrac{\pi}{2}) = \lambda(-1, 0, 1),\ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

ou seja,

$$x = -\lambda\ ;\ y - 1 = 0\ ;\ z - \frac{\pi}{2} = \lambda$$

e, portanto, é a reta definida pelas duas equações,

$$y = 1\ ;\ x + z = \pi/2$$

Conjunto de Nivel. Vetor Normal

Seja $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar de classe C^1. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, considere-se o respetivo conjunto de nível:

$$N(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = \alpha\} \qquad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Seja $p \in N(\alpha)$ um ponto qualquer e $\Gamma \subset N(\alpha)$ uma linha, tal que $p \in \Gamma$ supondo que Γ é descrita por uma função $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, com $\varepsilon > 0$, sem perda de generalidade, tome-se $p = \gamma(0)$

Como $\Gamma \subset N(\alpha)$, é claro que $\gamma(t) \in N(\alpha)$ e, portanto,

$$F(\gamma(t)) = 0\ ;\ -\varepsilon < t < \varepsilon$$

Pelo teorema da derivada da função composta:

$$\nabla F(\gamma(0))\gamma'(0) = 0 \iff \nabla F(p)\gamma'(0) = 0$$

Assim, os vetores $\gamma'(0)$ e $\nabla F(p)$ são ortogonais entre si. Note-se que $\nabla F(p)$ é uma matriz linha e $\gamma'(0)$ é uma matriz coluna.
O produto entre ambas é o produto interno das respetivas versões vetoriais.

Seja N um vetor ortogonal a T, ou seja, um vetor que verifica a equação $N \cdot T = 0$

Ao vetor N chama-se vetor normal a $N(\alpha)$ no ponto p

É claro que o vetor normal N é perpendicular a qualquer vetor tangente ao conjunto de nível $N(\alpha)$ no ponto p.

Portanto, o gradiente de uma função escalar num ponto é normal ao respetivo conjunto de nível dessa função.

Nota: O plano gerado pelos vetores tangentes e que passa, por exemplo, pelo ponto (a,b,c) chama-se plano tangente a P no ponto (a,b,c) e é dado pela equação,

$$(x-a, y-b, z-c) \cdot \nabla F(a,b,c) = 0 \quad (\text{Em } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$$

Extremos

· Derivadas de ordem superior

exemplo: Seja $f(x,y) = xy^2 + yx^3$

As derivadas parciais de ordem um:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3yx^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + x^3$$

As derivadas parciais de ordem dois:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 6xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 2y + 3x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 2y + 3x^2$$

⇒ Diz-se que uma função f é de classe C^k, se as derivadas parciais de ordem menor ou igual a k existirem e forem contínuas

Teorema Schwarz

Se $D \subset \mathbb{R}^n$ for um conjunto aberto e $f: D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

Teorema de Lagrange

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, e $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Sejam a e b dois pontos em D, tais que o segmento de reta entre eles esteja contido em D. Então existe um ponto c nesse segmento de reta, tal que

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b-a)$$

com c distinto de a e de b.

Definição

Seja $D \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Diz-se que $a \in D$ é um ponto crítico ou ponto de estacionaridade da função f se $\nabla f(a) = 0$

Portanto, uma função de classe C^1 e com gradiente nulo numa bola é constante nessa bola.

Os pontos de extremo de uma função escalar, de classe C^1 e definida num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ encontram-se no conjunto dos pontos críticos

É então necessário definir um critério para identificar, no conjunto dos pontos críticos, os que são pontos de máximo e os que são de mínimo.

—"—

Seja $a \in D$ um ponto de extremo da função f. Para um vetor qualquer $h \in \mathbb{R}^n$, considere-se a restrição de f à linha reta que passa no ponto a na direção h, isto é, a função

$$g(t) = f(\gamma(t)), \text{ com } \gamma(t) = a + th$$

Note-se que

$$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot h = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t))\, h_k$$

e, portanto,

$$g''(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\gamma(t))\, h_j h_k$$

A matriz com n linhas e n colunas cujas entradas são as derivadas parciais de ordem dois, designada pelo símbolo $D^2f(a)$, ou seja,

$$D^2f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}$$

chama-se matriz hessiana de f no ponto a. Assim, a derivada $g''(t)$ poderá ser apresentada na forma matricial

$$g''(t) = h^T D^2 f(\gamma(t)) h$$

ou na forma vetorial

$$g''(t) = h \cdot D^2 f(\gamma(t))h$$

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um valor próprio da matriz hessiana $D^2 f(a)$ e $h \neq 0$ um vetor próprio associado a λ, ou seja,

$$D^2 f(a)h = \lambda h$$

$\Leftrightarrow$

Classificação dos Pontos de Estacionaridade

a) Os valores próprios de $D^2 f(a)$ são todos positivos: a é um ponto mínimo de f

b) Os valores próprios de $D^2 f(a)$ são todos negativos: a é um ponto máximo de f

c) A matriz hessiana $D^2 f(a)$ tem pelo menos um valor próprio positivo e pelo menos um negativo: a não é um extremo de f (por vezes chamado ponto de sela).

d) A matriz hessiana $D^2 f(a)$ tem pelo menos um valor próprio nulo, e os restantes têm o mesmo sinal. Neste caso, a função f deve ser analisada nas direções próprias associadas aos valores próprios nulos, recorrendo, por exemplo, às derivadas de ordem superior a dois ou outras técnicas.

No último caso, esta análise pode não ser conclusiva. O estudo direto do comportamento da função numa vizinhança de a poderá esclarecer o problema.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo:

Seja $f(x,y) = x^2+y^2$. É claro que a função f é de classe C^2

a) Pontos Críticos: $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

A origem é o único ponto crítico

b) Classificação do Ponto Crítico $(0,0)$

A matriz hessiana

$$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

apresenta dois valores próprios positivos $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e, portanto, o ponto crítico $(0,0)$ é ponto de mínimo local de f, pois pelo teste de segunda ordem não se pode concluir mais nada.

No entanto, por análise elementar, a origem é um ponto de mínimo absoluto da função f.

- Funções integráveis

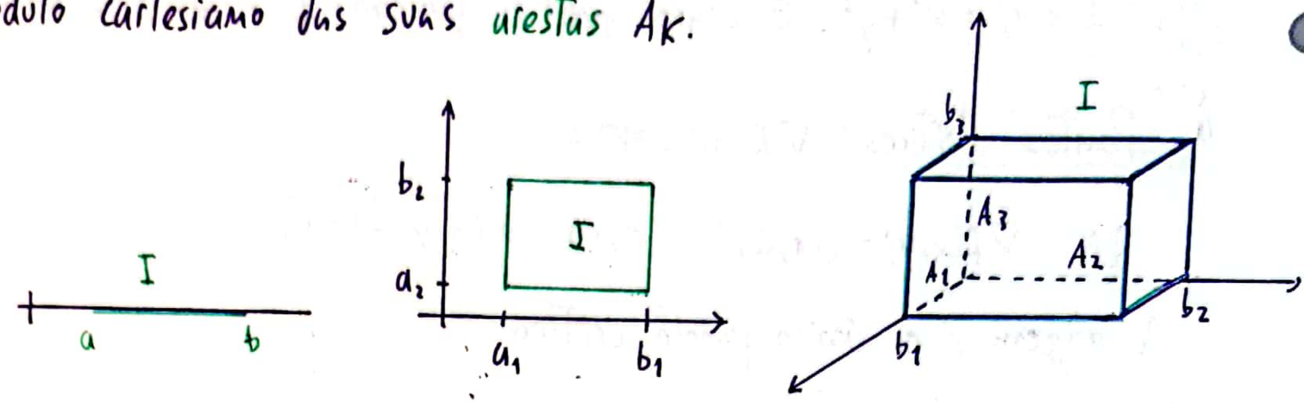
Definição

Um intervalo em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma

$$I = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \in A_k ; k = 1, 2, \dots, n\}$$

onde cada conjunto A_k é um intervalo de $\mathbb{R}$

É claro que $I = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ e diz-se que I é o produto cartesiano das suas arestas A_K.

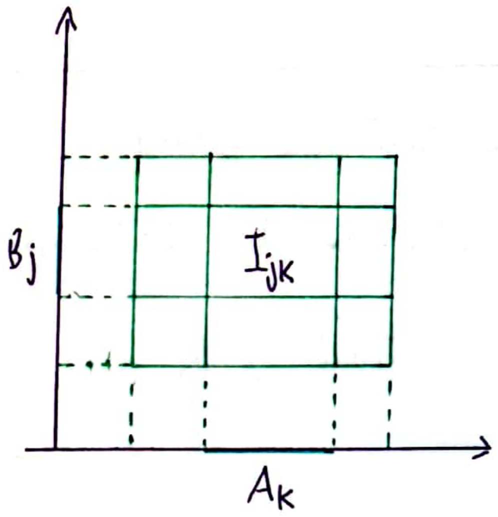


Intervalos em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Definição

Dado um intervalo limitado $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, uma partição de I é uma coleção finita de pontos $P = \{p_0 < p_1 < \ldots < p_m\}$; $m \in \mathbb{N}$, em que $a = p_0$ e $b = p_m$

Uma partição de um intervalo limitado $I = A_1 \times A_2$ em $\mathbb{R}^2$ é o produto $P = P_1 \times P_2$ em que P_1 é uma partição da aresta A_1, e P_2 é uma partição da aresta A_2. Sejam m_1 e m_2, respetivamente, o número de subintervalos de P_1 e de P_2. A partição P pode ser identificada como uma coleção de subintervalos designados por $\{I_{jk}\}_{j,k=1}^{m_1\, m_2}$



- Representação de uma partição num intervalo em $\mathbb{R}^2$
- Cada subintervalo da partição I_{jK} é o produto de duas arestas, A_K e B_j, ou seja, $I_{jK} = A_K \times B_j$

Definição

Seja $I \subset \mathbb{R}^m$ um intervalo limitado. Diz-se que $s: I \to \mathbb{R}$ é uma **função em escada** em I, se existir uma partição $\{I_k\}_{k=1}^{N}$ do intervalo I, e uma coleção de números reais $\{s_k\}_{k=1}^{N}$, tais que $s(x) = s_k$, se $x \in int(I_k)$, em que $int(I_k)$ designa o interior de I_k.

Definição

Dado um intervalo limitado, $I = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m \subset \mathbb{R}^m$, chama-se **volume** de I à quantidade $vol_m(I) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$, em que $a_i < b_i$ são os extremos da aresta A_i, com $i = 1, 2, \ldots m$

Um intervalo $I \subset \mathbb{R}^m$ é o produto cartesiano de m intervalos $A_k \subset \mathbb{R}$, com $k = 1, 2, \ldots, m$.

Então:

$$vol_m(I) = \prod_{k=1}^{m} vol_1(A_k)$$

Definição

Dada uma função em escada, $s: I \to \mathbb{R}$, chama-se **integral** de s em $I \subset \mathbb{R}^m$ à quantidade

$$\int_I s = \sum_{k=1}^{N} s_k \, vol_m(I_k)$$

em que $\{I_k\}_{k=1}^{N}$ é uma partição associada à função s.

ex: Seja $I=[0,1]\subset\mathbb{R}$ e $s: I\to\mathbb{R}$ a função, cujo gráfico se apresenta numa figura, definida por

$$s(x)=\begin{cases}1, & \text{se } 0<x<\frac{1}{2}\\ 3, & \text{se } \frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}\\ -2, & \text{se } \frac{2}{3}<x<1\end{cases}$$

Trata-se de uma função escada, cujo integral é dado por

$$\int_I s=\int_I s(x)\,dx = 1\times\frac{1}{2}+3\times\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

ex: Seja $I=[0,1]\times[0,2]\times[1,2]\subset\mathbb{R}^3$, e $s: I\to\mathbb{R}$ dada por

$$s(x,y,z)=\begin{cases}1, & \text{se } 0<x<1;\ 0<y<2;\ 1<z<\frac{3}{2}\\ 2, & \text{se } 0<x<1;\ 0<y<2;\ \frac{3}{2}<z<2\end{cases}$$

O integral de s em I é dado por

$$\int_I s=\int_I s(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 1\times1\times2\times\frac{1}{2}+2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$$

Definição

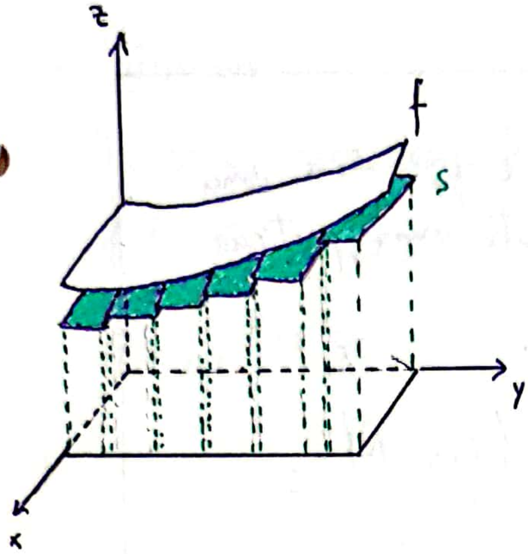
Seja $f: I\to\mathbb{R}$ uma função limitada e definida num intervalo compacto $I\subset\mathbb{R}^n$.

Diz-se que f é integrável à Riemann em I, se

$$\sup_{s\leq f}\int_I s=\inf_{t\geq f}\int_I t$$

O respetivo integral é o número real

$$\int_I f=\sup_{s\leq f}\int_I s=\inf\int_I t$$



Se $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$ então o respetivo integral pode ser calculado da forma:

$$\int_I s = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\ldots \int_{a_m}^{b_m} s(x_1, \ldots, x_m) \, dx_m \right) \ldots dx_2 \right) dx_1$$

Na figura encontra-se um exemplo de uma função limitada $f: I \to \mathbb{R}$ e uma função em escada $s: I \to \mathbb{R}$ tal que $s \leq f$, com $I \subset \mathbb{R}^2$, para ilustração da definição de integral.

As funções em escada são naturalmente integráveis face à definição. Para além disso, é importante observar que, tendo em conta a expressão acima, dada uma função em escada $s: I \to \mathbb{R}$ definida em $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$, então a função $x_k \to s(x_1, \ldots, x_m)$, em que todas as variáveis estão fixas, exceto x_k, é integrável no intervalo $[a_k, b_k]$, para qualquer $k = 1, 2, \ldots, m$

Por definição de ínfimo e de supremo, é claro que dado $\varepsilon > 0$, deverão existir duas funções em escada $s: I \to \mathbb{R}$ e $t: I \to \mathbb{R}$, tais que $s \leq f \leq t$ e

$$\int_I (t - s) < \varepsilon \Leftrightarrow \int_I t < \int_I s + \varepsilon$$

É também claro que, dado $\varepsilon > 0$, então:

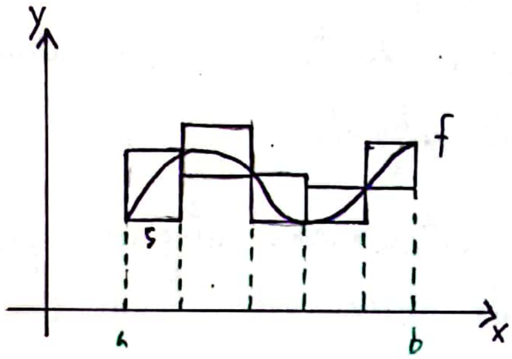
$$\int_I f < \int_I s + \varepsilon$$

Ou seja, o integral $\int_I s$ é uma aproximação por defeito do integral de f. Do mesmo modo, o integral $\int_I t$ é uma aproximação por excesso do integral de f.

teorema

Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $\{I_k\}_{k=1}^{N}$ do intervalo I, tal que

$$\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f < \varepsilon, \forall k \in \{1, \dots, N\}$$



A propriedade das funções contínuas encontra-se ilustrada na figura acima. Note-se que a diferença $\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f$ é inferior a ε em todos os intervalos da partição.

À diferença $\sup_A f - \inf_A f$ chama-se oscilação de f no conjunto A, e será designada pela expressão $osc(f, A)$

teorema

Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto, e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f é integrável em I.

Nota: As funções em escada são integráveis, mas podem ser descontínuas nas arestas dos subintervalos da partição do respetivo intervalo de definição

Definição

Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo, se, dado $\varepsilon > 0$ existir uma coleção finita de intervalos $\{I_k\}_{k=1}^{N}$ tais que
(retângulos)

↳ retângulos finitos

lupa infinita

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} I_k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{N} \mathrm{vol}(I_k) < \varepsilon$$

união

Teorema

O gráfico de uma função contínua $\phi : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$, tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}^{n+1}$

A união finita de conjuntos de conteúdo nulo é também um conjunto de conteúdo nulo.

Mais geralmente, a fronteira de um cojunto limitado e definido por um sistema de inequações que envolvam funções contínuas tem conteúdo nulo.

Teorema

Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto, e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua, exceto num conjunto de conteúdo nulo. Então f é integrável em I.

Os conjuntos em que as funções integráveis não são contínuas têm volume nulo. Os conjuntos de conteúdo nulo são exemplos de tais conjuntos.

Teorema Fubini

Sejam $A \subset \mathbb{R}^k$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ intervalos compactos, e seja f uma função limitada e integrável no intervalo $A \times B \subset \mathbb{R}^{k+m}$, tais que:

a) Para cada $x \in A$, a função $y \mapsto f(x,y)$ é integrável em B

b) A função $x \mapsto \psi(x)$ é integrável em A

Então:

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \psi(x)\,dx = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx$$

É claro que os papéis de x e de y podem ser trocados, obtendo-se

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx \right) dy$$

Os integrais da forma $\int_A \left[\int_B f(x,y)\,dy \right] dx$ ou $\int_B \left[\int_A f(x,y)\,dy \right] dx$ são designados por integrais iterados.

exemplo:

Seja a função $f(x,y) = xy$ definida no intervalo $I = [0,2] \times [0,1]$

Sendo contínua, é integrável no intervalo compacto I.

Fixando $0 \leq x_0 \leq 2$, a função de uma variável $f(x_0, y) = x_0 y$ é contínua e por é integrável em $[0,1]$

$$\psi(x_0) = \int_0^1 x_0 y\,dy = x_0 \int_0^1 y\,dy = \frac{x}{2}$$

Sendo $\psi(x) = \frac{x}{2}$ uma função contínua, é integrável em $[0,1]$

Então:

$$\int_I f = \int_0^2 \psi(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{2}\,dx = 1$$

Exemplo: A função $f(x,y,z) = xy + e^z$ é contínua e, portanto, o respetivo integral no intervalo $I = [0,1] \times [0,2] \times [0,1]$ é dado por

$$\int_I f = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 (xy + e^z)\, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^2 (xy - e - 1)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 (2x + 2e - 2)\, dx$$

$$= 2e - 1$$

Definição

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função limitada, e I um intervalo compacto, tais que $D \subset I$.
Se $\tilde{f}$ for integrável no intervalo I, diz-se que f é integrável em D, e,

$$\int_D f = \int_I \tilde{f}$$

só para puder usar fubini

fubini só resulta em retangulos

Definição

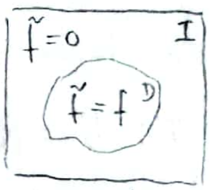
Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, I um intervalo compacto, tal que $D \subset I$, e $\mathcal{X} : I \to \mathbb{R}$ a chamada função característica do conjunto D, definida por

$$\mathcal{X}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \in I \setminus D \end{cases}$$

O volume do conjunto D é o integral

$$\mathrm{vol}_n(D) = \int_I \mathcal{X}$$

desde que a função $\mathcal{X}$ seja integrável em I



extensão de uma função definida em D a um intervalo compacto I.

Definição

Dado $D \subset \mathbb{R}^n$, ao conjunto $C(x_k)$, com $k = 1, 2, \ldots, n$, definido por

$$C(x_k) = D \cap \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = c\}$$

em que $c \in \mathbb{R}$, chama-se corte em D perpendicular ao eixo Ox_k

Exemplos de funções importantes pelo significado físico do respetivo integral:

a) Volume

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$. Então, o integral $\int_D f = \text{vol}_n(D)$ é o volume do conjunto D.

b) Massa

Seja $\sigma : D \to \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de volume do material que constitui um corpo representado pelo conjunto D. Então, a massa M do corpo D é dada pelo integral $M = \int_D \sigma$

$\text{Massa}(R) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

Note-se que, para $\sigma = 1$, a massa é o volume

$\text{Carga}(R) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

$\text{Área}(R) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

c) Centro de Massa

Seja $\sigma : D \to \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de volume do material que constitui um corpo representado pelo conjunto D, e seja

$\bar{x} = \frac{1}{\text{Massa}(R)} \iint x f(x,y)\,dx\,dy$

$\bar{y} = \frac{1}{\text{Massa}(R)} \iint y f(x,y)\,dx\,dy$

$$f_i(x) = \frac{1}{M} x_i \, \sigma(x) \, ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

em que M é a massa do corpo D

O centro de massa é o ponto de coordenadas $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ calculadas da maneira seguinte:

$$\bar{x}_i = \int_D f_i \, ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

No caso em que $\sigma = 1$, ao centro de massa também se chama centróide

d) Momento de inercia

Seja L uma linha reta e $d_L(x)$ a distância do ponto $x \in \mathbb{R}^m$ à linha L.

O momento de inercia do conjunto D relativo à reta L, designado pelo símbolo I_L, é o integral da função definida por $f(x) = \sigma(x) \, d_L^2(x)$, ou seja,

$$I_L = \int_D f$$

em que σ é a densidade de massa por unidade de volume de D

Os casos importantes a considerar são aqueles em que L é um dos eixos coordenados.

—"—

Ao integral $\int_0^1 f(t, x) \, dt$ chama-se integral paramétrico, em que a variável x desempenha o papel de parâmetro

Regra de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(t,x)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$$

exemplo:

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida pelo integral

$$F(x)=\int_0^1 \sin(xt^2)\,dt$$

Não é fácil calcular o integral, por não se ter à disposição uma primitiva para a função $\sin(xt^2)$. No entanto, recorrendo à regra de Leibniz,

$$F'(x)=\int_0^1 t^2\cos(xt^2)\,dt$$

e, então,

$$F'(0)=\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3}$$

- Aplicações do Teorema de Fubini

exemplo: Áreas em $\mathbb{R}^2$

Seja $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<2 \,;\, y>x^2\}$

É claro que, sendo $x^2+y^2<2$ e $y>x^2$ então $x^4+x^2-2<0$, ou seja,

$$x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1$$

A circunferência e a parábola intersetam-se nos pontos cujas coordenadas são determinadas resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2+y-2=0 \\ y=x^2 \end{cases}$$

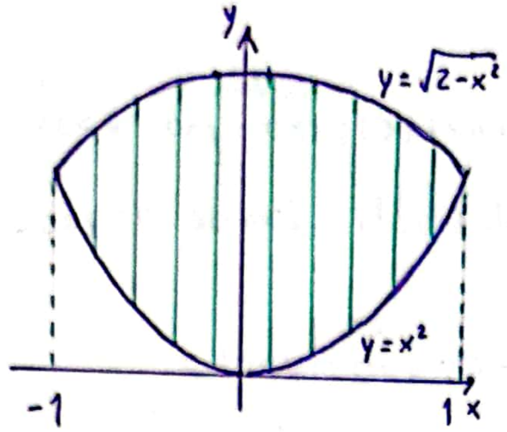
$\int_{-y}^{y} dx$

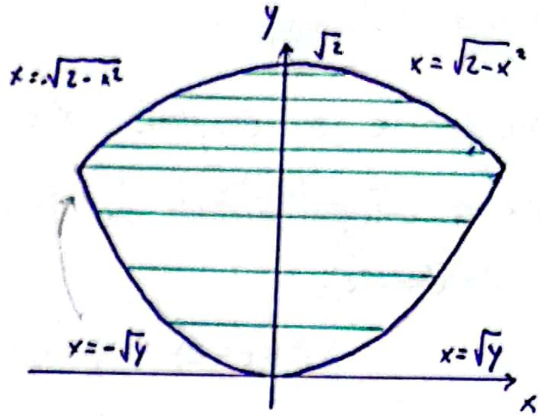
quero

$dx \to$ "—"

$dy \to$ "|"

ou seja, nos pontos $(-1,1)$, $(1,1)$





Assim, o conjunto D pode ser descrito na forma

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -1<x<1;\ x^2<y<\sqrt{2-x^2}\}$$

e a respetiva área é dada pelo seguinte integral iterado:

$$\rightarrow \operatorname{Vol}_2(D)=\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx$$

Do mesmo modo, sendo $x^2+y^2<2$, então $y^2<2$ e, dado que $y>x^2\geqslant 0$ deduz-se que $0<y<\sqrt{2}$

Por outro lado, $x^2<y$ e $x^2<2-y^2$. Assim há dois casos a considerar

Será $x^2<y$, desde que $y<2-y^2$, isto é, para $0<y<1$

Portanto, $0<y<1;\ -\sqrt{y}<x<\sqrt{y}$

Deverá ser $x^2<2-y^2$, desde que $2-y^2<y$, isto é, para $1<y<\sqrt{2}$

Assim, $1<y<\sqrt{2};\ -\sqrt{2-y^2}<x<\sqrt{2-y^2}$

Tal como ilustra no desenho o conjunto D pode então ser descrito como a união dos dois conjuntos seguintes:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<y<1;\ -\sqrt{y}<x<\sqrt{y}\}$$

e

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1<y<\sqrt{2};\ -\sqrt{2-y^2}<x<\sqrt{2-y^2}\}$$

Existem duas maneiras

A área D é dada por

$$\rightarrow \operatorname{vol}_2(S)=\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\right)dy+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} dx\right)dy$$

exemplo: Volumes em $\mathbb{R}^3$

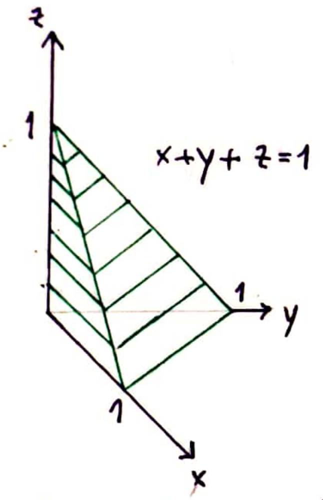
Considere-se o conjunto $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z<1 ; x>0 ; y>0 ; z>0\}$

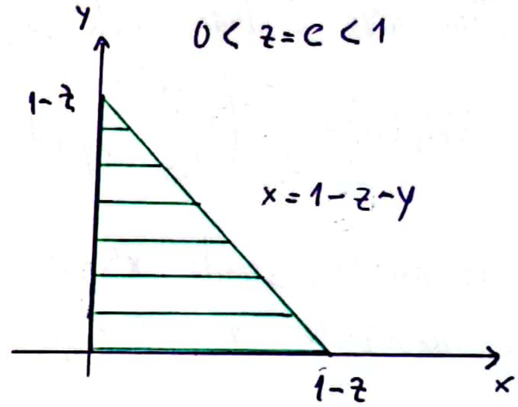
Para o integral iterado da forma $\int\left(\int\left(\int dx\right) dy\right) dz$, fixa-se $0<z=c<1$ e obtém-se:

$$X \cap \{z=c\} = \{(x,y,c) : x+y<1-c ; x>0 ; y>0\}$$
$$= \{(x,y,c) : 0<y<1-c ; 0<x<1-c-y\}$$

Assim, o conjunto X passa a ser descrito:

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0<z<1 ; 0<y<1-z ; 0<x<1-z-y\}$$



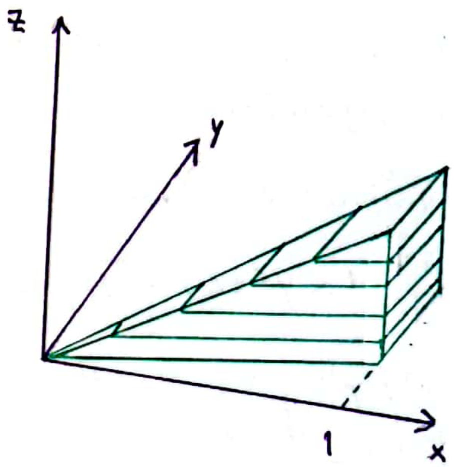


O volume de X é então dado por

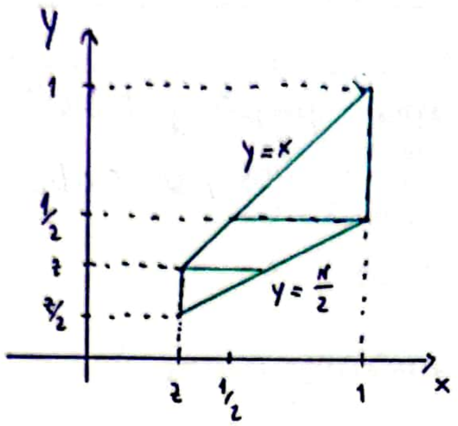
$$vol_3(X) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z-y} dx \right) dy \right) dz = \frac{1}{6}$$

outro exemplo:

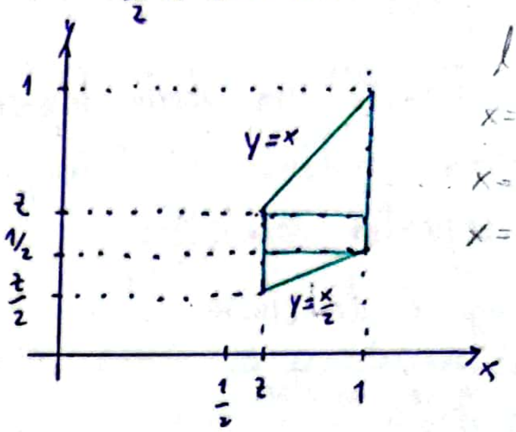
Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z<x<1 \quad y<x<2y\}$



$0 < z = c < \frac{1}{2}$



$\frac{1}{2} < z = c < 1$



l.d.c

$x=0 \quad x=1$

$x=2y \quad x=\frac{z}{2}$

$x=y$

Para o integral iterado da forma $\int\left(\int\left(\int dx\right)dy\right)dz$, devem ocorrer dois casos: a) $0 < z = c < \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2} < z = c < 1$

Em qualquer um dos casos o corte é dado por

$$S \cap \{z=c\} = \{(x,y,c) : z < x < 1;\ \frac{z}{2} < y < x\}$$

Deduz-se: $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < x < 2y \\ z < x < 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < z < x < 1 \\ \frac{z}{2} < y < x < 2y \end{cases}$

Isto quer dizer que, depois de se fixar z e y, tem-se $x < 1$, se $2y < 1$, ou então $x < 2y$ se $y < \frac{1}{2}$

Duas situações distintas

a) Para $0 < z = c < \frac{1}{2}$, a coordenada y é fixada em três intervalos: ou $]\frac{z}{2}, z[$, ou $]z, \frac{1}{2}[$ ou $]\frac{1}{2}, 1[$

b) Para $\frac{1}{2} < z = c < 1$, a coordenada y é fixada em três intervalos: ou $]\frac{z}{2}, \frac{1}{2}[$, ou $]\frac{1}{2}, z[$ ou $]z, 1[$

Assim, o volume de S é dado pela soma de seis integrais iterados:

$$\mathrm{Vol}_3(S) = \int_0^{1/2}\left(\int_{\frac{z}{2}}^{z}\left(\int_z^{2y} dx\right)dy\right)dz + \int_0^{1/2}\left(\int_z^{1/2}\left(\int_y^{2y} dx\right)dy\right)dz +$$

$$+ \int_0^{1/2}\left(\int_{1/2}^{1}\left(\int_y^{1} dx\right)dy\right)dz + \int_{1/2}^{1}\left(\int_{z/2}^{1/2}\left(\int_z^{2y} dx\right)dy\right)dz +$$

$$+ \int_{1/2}^{1}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{z}\left(\int_z^{1} dx\right)dy\right)dz + \int_{1/2}^{1}\left(\int_z^{1}\left(\int_y^{1} dx\right)dy\right)dz$$

■ Teorema da mudança de variáveis

Definição

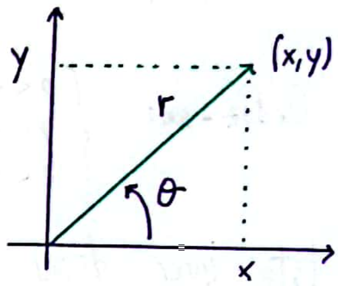
Seja $T \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Diz-se que uma função $g: T \to \mathbb{R}^n$ é uma mudança ou transformação de variáveis, se verificar as seguintes condições:

i) g é de classe C^1

ii) g é injetiva

iii) A derivada de g é injetiva, ou seja, $D_g(t) \neq 0, \forall t \in T$

__Coordenadas polares (r, θ) em $\mathbb{R}^2$__



As coordenadas polares (r, θ) são definidas por

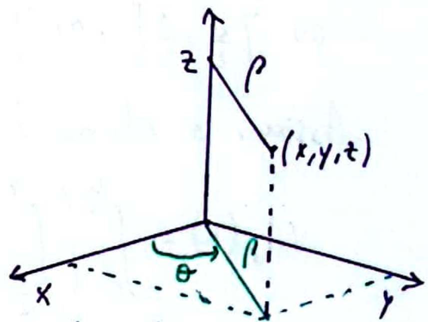
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ designa a distância de cada ponto de coordenadas (x,y) à origem, e θ é o ângulo formado entre o semieixo positivo Ox e o vetor (x,y)

Seja $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$. De facto,

$$\det D_g(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

__Coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) em $\mathbb{R}^3$__



As coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) são definidas por

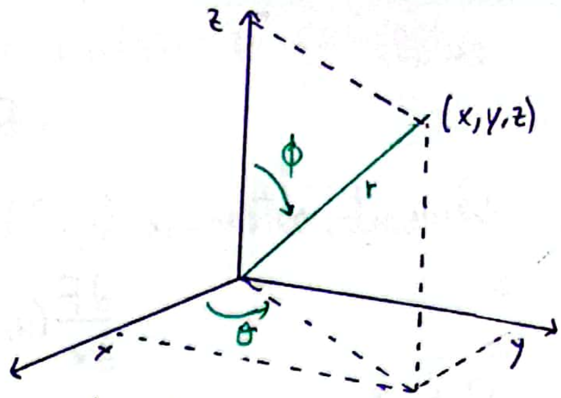
$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta$$
$$z = z$$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ designa a distância de cada ponto de coordenadas (x,y,z) ao eixo Oz, e θ é o ângulo formado entre o semieixo positivo e o vetor $(x,y,0)$

Seja $g(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$

$$\det D_g(\rho,\theta,z) = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho > 0$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) em $\mathbb{R}^3$



As coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) são definidas por

$$x = r \sin\phi \cos\theta$$
$$y = r \sin\phi \sin\theta$$
$$z = r \cos\phi$$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ designa a distância de cada ponto de coordenadas (x,y,z) à origem, θ é o ângulo formado entre o semieixo Ox e vetor $(x,y,0)$ e ϕ designa o ângulo entre o semieixo positivo Oz e o vetor (x,y,z)

Seja $g(r,\theta,\phi) = (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$. De facto,

$$\det D_g(r,\theta,\phi) = \det \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{bmatrix} = -r^2\sin\phi \neq 0$$

Teorema

Seja $T \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, $g: T \to \mathbb{R}^n$ uma mudança de variáveis, tal que $X = g(T)$ e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então:

$$\int_X f(x)\,dx = \int_T f(g(t))\,|\det D_g(t)|\,dt$$

- Função Inversa. Função Implícita

Seja $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, e (a,b) um ponto tal que $F(a,b)=0$

Supondo que, mesmo sem efetuar os cálculos explicitamente, em alguma bola centrada no ponto (a,b) se tem

$$F(x,y) = 0 \iff y = f(x)$$

sendo f uma função real de variável real de classe C^1 e definida em algum intervalo contendo o ponto a

então,

$$F(x, f(x)) = 0$$

Derivando, obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\, f'(a) = 0$$

Portanto,

$$\boxed{f'(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}}$$

desde que se verifique

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

Surge, assim, a questão seguinte. Se $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ for uma função de classe C^1, e (a,b) um ponto que verifique as condições

$$F(a,b) = 0 \; ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

existirá alguma função f, de classe C^1, tal que, localmente em torno de (a,b), se tenha

$$F(x,y) = 0 \iff y = f(x)?$$

A resposta afirmativa a esta questão é dada pelo célebre teorema da função implícita.

① Se, em torno de um ponto (a,b,c) que verifique a equação $F(a,b,c)=0$, for garantida a equivalência

$$F(x,y,z)=0 \Leftrightarrow z=f(x,y)$$

então, $F(x,y,f(x,y))=0$

Derivando em ordem a x e a y, obtém-se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)+\dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)+\dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)} \quad ; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)}} \qquad \dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\neq 0$$

② Se, em torno de um ponto (a,b,c), tal que $F_1(a,b,c)=0$ e $F_2(a,b,c)=0$, for verdadeira a equivalência

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ z=g(x) \end{cases}$$

em ordem a x, obtém-se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(a,b,c)+\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(a,b,c)\,f'(a)+\dfrac{\partial F_1}{\partial z}(a,b,c)\,g'(a)=0 \\[2mm] \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(a,b,c)+\dfrac{\partial F_2}{\partial y}(a,b,c)\,f'(a)+\dfrac{\partial F_2}{\partial z}(a,b,c)\,g'(a)=0 \end{cases}$$

Na forma matricial, será

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(a,b,c) \\[2mm] \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(a,b,c) & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(a,b,c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'(a) \\[2mm] g'(a) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(a,b,c) \\[2mm] \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(a,b,c) \end{bmatrix}$$

e podem ser calculadas as derivadas $f'(a)$ e $g'(a)$, desde que se tenha

$$\det = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(a,b,c) \end{bmatrix} \neq 0$$

Neste caso as derivadas $f'(a)$ e $g'(a)$ serão dadas por

$$\begin{bmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(a,b,c) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(a,b,c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(a,b,c) \end{bmatrix}$$

Teorema da Função Implícita

Seja $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $m < n$, uma função de classe C^1, definida num aberto A. Seja $(a,b) \in \mathbb{R}^n$, tal que $a \in \mathbb{R}^{n-m}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e

$$F(a,b) = 0 \quad ; \quad \det D_y F(a,b) \neq 0$$

Então, existe uma função f, de classe C^1, tal que, localmente em torno de (a,b), se tem

$$F(x,y) = 0 \iff y = f(x)$$

1. No caso geral, um sistema de m equações em $\mathbb{R}^n$, nas condições do teorema, define implicitamente m variáveis designadas por y, em função das restantes $(n-m)$ variáveis, designadas por x.

2. A existência local da função f em torno de cada um dos pontos do conjunto definido pelo referido sistema de equações deve ser entendida no seguinte sentido. Existe uma bola centrada no ponto (a,b) em que o conjunto definido pela equação $F(x,y)=0$ é o gráfico da função $f: B_\varepsilon(a) \to \mathbb{R}^m$, em que $\varepsilon > 0$, e $B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^{n-m}$ designa uma bola centrada em $a \in \mathbb{R}^{n-m}$ e de raio ε

3. Usam-se os símbolos $D_x F(a,b)$ e $D_y F(a,b)$ para designar as matrizes das derivadas parciais da função F em ordem às variáveis designadas por x e por y, respetivamente, no ponto (a,b). Assim, se $\det D_y F(a,b) \neq 0$, então $y = f(x)$, localmente em torno de (a,b), ou seja, $F(x, f(x)) = 0$.

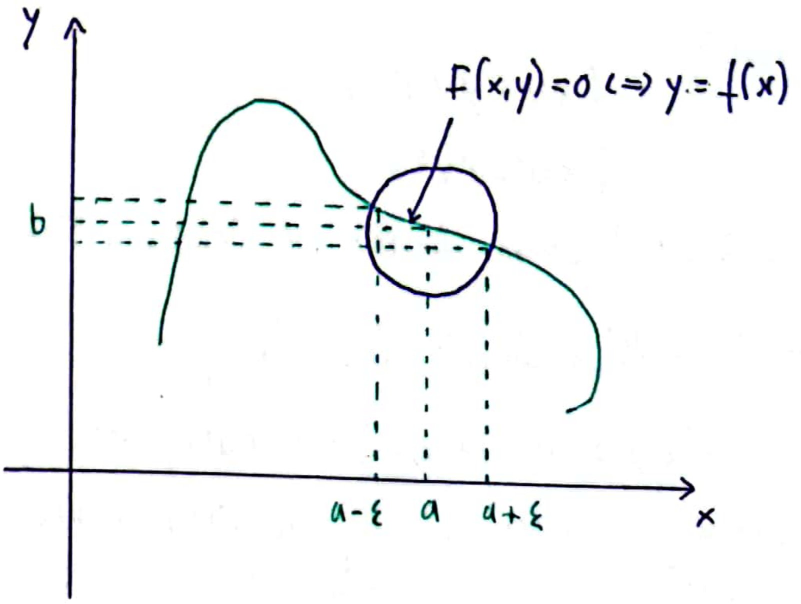
Derivando em x, obtém-se

$$D_x F(a,b) + D_y F(a,b)\, Df(a) = 0$$

e, portanto,

$$\boxed{Df(a) = -\left(D_y F(a,b)\right)^{-1} D_x F(a,b)}$$

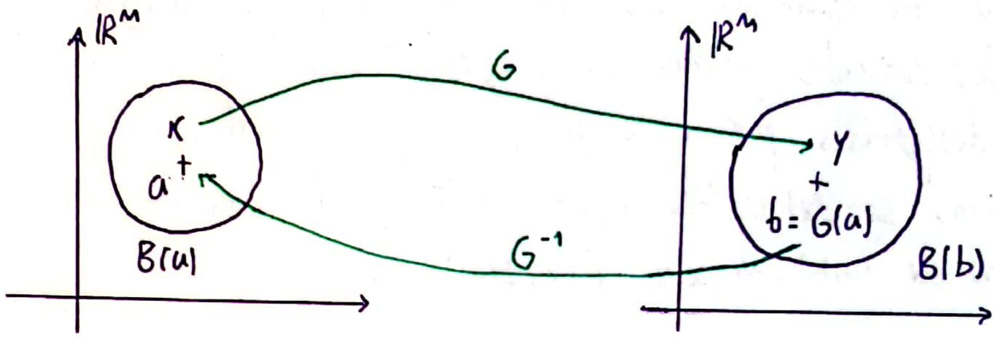
Ilustração do enunciado do teorema da função implícita em $\mathbb{R}^2$:



Teorema da Função Inversa

Seja $G: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1, definida num aberto A, e $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto, tal que $\det DG(a) \neq 0$. Então, G é localmente invertível em torno do ponto a, e a respetiva inversa G^{-1} é uma função de classe C^1

Função Inversa:



Por definição de função inversa, tem-se $x = G^{-1}(G(x))$, $\forall x \in B(a)$ e, portanto,

$$\boxed{DG^{-1}(b) = [DG(a)]^{-1}}$$

Assim, a matriz jacobiana da função inversa G^{-1} no ponto $b = G(a)$ é a inversa da matriz jacobiana de G no ponto a.

Exemplo (T. F. Implícita):

O sistema de equações

$$\begin{cases} xu + yvu^2 = 2 \\ xu^3 + y^2v^4 = 2 \end{cases}$$

define implicitamente (u,v) como funções de (x,y) em torno do ponto $(1,1,1,1)$?

De facto, seja $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$F(x,y,u,v) = (xu + yvu^2, xu^3 + y^2v^4)$$

Trata-se de uma função de classe C^1, tal que $F(1,1,1,1) = (2,2)$, e a respetiva derivada no ponto $(1,1,1,1)$ é dada por

$$DF(1,1,1,1) = \begin{bmatrix} u & vu^2 & x+2yvu & yu^2 \\ u^3 & 2yv^4 & 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{bmatrix}_{x=1,\,y=1,\,u=1,\,v=1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

e, portanto,

$$\det D_{uv} F(1,1,1,1) = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 9$$

O <u>teorema da função implícita garante $(u,v) = (u(x,y), v(x,y))$</u> localmente em torno do ponto $(1,1,1,1)$. Derivando a função F em x, obtém-se

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + u + y\dfrac{\partial v}{\partial x}u^2 + 2yvu\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ 3xu^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 3\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -1 \\ 3\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4\dfrac{\partial v}{\partial x} = -1 \end{cases}$$

no ponto $(1,1,1,1)$, de onde se deduz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,1) = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,1) = 0 \end{cases}$$

- Variedades. Parametrizações

Definição

Diz-se que $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão $(n-m)$, se para qualquer ponto $a \in M$ existe uma bola $B(a)$, centrada em a, tal que o conjunto $M \cap B(a)$ pode ser descrito de uma das três maneiras seguintes.

i) Como conjunto de nível zero de uma função $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $m < n$, de classe C^1, definida num aberto de $\mathbb{R}^n$, tal que a matriz $DF(x)$ tem característica m, para qualquer $x \in M \cap B(a)$:

$$M \cap B(a) = \{ x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0 \}$$

ii) Como gráfico de uma função $f: A \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1, definida num aberto de $A \subset \mathbb{R}^{n-m}$:

$$M \cap B(a) = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m : v = f(u), u \in A \}$$

iii) Como a imagem de uma parametrização que é uma função $g: T \to \mathbb{R}^n$ injetiva de classe C^1, definida num aberto $T \subset \mathbb{R}^{n-m}$, tal que a matriz $Dg(t)$ tem característica $(n-m)$, para qualquer $t \in T$

$$M \cap B(a) = \{ g(t), t \in T \} = g(T)$$

Exemplo: Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ a circunferência definida pela equação $x^2+y^2=1$.

É claro que se trata do conjunto de nível zero da função $F(x,y) = x^2+y^2-1$. Esta função é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, e a respetiva derivada

$$\nabla F(x,y) = [2x \quad 2y]$$

é nula apenas na origem $(x,y)=(0,0)$. No entanto, a origem não pertence à circunferência. Portanto, esta circunferência é uma variedade-1.

Como $N=\nabla F(0,1)=(0,2)$ é um vetor normal no ponto $(0,1)$, a reta normal à circunferência nesse ponto é dada na forma paramétrica por

$$(x,y)-(0,1)=\lambda(0,2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y-1=2\lambda \end{cases}$$

A reta tangente em P é dada por $(x,y-1)\cdot(0,2)=0$, ou seja, pela equação $y=1$

Para $y>0$ tem-se

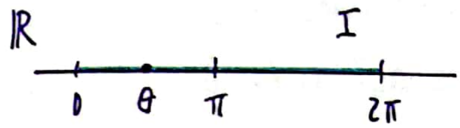
$$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y=\sqrt{1-x^2}$$

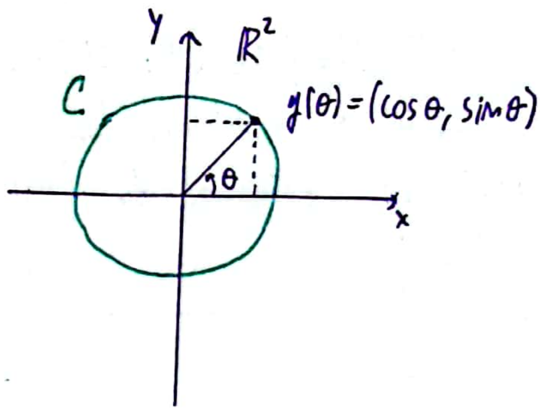
e, portanto, a função $g(x)=(x,\sqrt{1-x^2})$, com $-1<x<1$, é uma parametrização da parte da circunferência em que $y>0$. É claro que esta parametrização descreve apenas metade da circunferência.

Tendo em conta a simetria, a circunferência pode ser descrita de outro modo. Note-se que os pontos de uma circunferência estão todos à mesma distância do centro. Se à distância ao centro se associar o ângulo θ, ficam definidas novas variáveis (r,θ)

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}, \text{ em que } r=\sqrt{x^2+y^2}$$

A circunferência dada por $x^2+y^2=1$ passa a ser descrita pela equação $r=1$ e, portanto, a variável θ pode ser usada para descrever parametricamente a circunferência.





De facto, seja

$$g(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi$$

Esta função é de classe C^1, injetiva, e a respetiva derivada

$$g'(t) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Tem característica 1. Esta parametrização descreve a circunferência, excluindo um ponto apenas, ou seja, as coordenadas polares (r, θ) são mais adequadas do que as cartesianas (x, y).

Definição

1. Diz-se que um vetor $T \in \mathbb{R}^n$ é tangente a uma variedade M, num ponto $a \in M$, se for tangente a uma linha $T \subset M$ que passe nesse ponto.

2. Ao espaço gerado pelos vetores tangentes à variedade M no ponto a chama-se espaço tangente

3. Ao ortogonal do espaço tangente a M no ponto a chama-se espaço normal a M no ponto a, e será designado pela expressão $(T_a M)^{\perp}$

Problema dos Extremos Condicionados

Sejam $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $m < n$, funções de classe C^1. Se o conjunto $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$ for uma variedade de dimensão $(n-m)$, então o problema dos extremos condicionados consiste na determinação dos extremos da função escalar f restringida à variedade M.

só conseguimos definir ponto crítico se estivesse num aberto

Seja $a \in M$ um ponto de extremo de f, e seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ um caminho de classe C^1 tal que

$$\gamma(0) = a \, ; \qquad F(\gamma(t)) = 0 \, , \; \forall t \in \mathbb{R}$$

ou seja, γ define uma linha $T \subset M$ que passa no ponto a.

então:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = 0 \iff \nabla f(a) \cdot \gamma'(0) = 0$$

Assim, os vetores $\nabla f(a)$ e $\gamma'(0)$ são ortogonais,

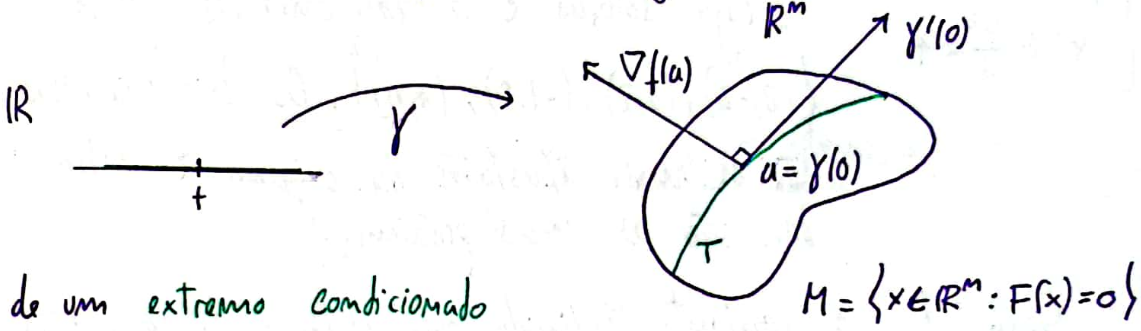


Figura de um extremo condicionado

Portanto, $\nabla f(a)$ é um vetor normal à variedade M nesse ponto, ou seja, é uma combinação linear dos vetores $\nabla F_1(a), \nabla F_2(a), \dots, \nabla F_m(a)$, isto é,

$$\boxed{\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla F_1(x) + \lambda_2 \nabla F_2(x) + \dots + \lambda_m \nabla F_m(x) = 0 \\ F(x) = 0 \end{cases}}$$

Este sistema apresenta $(n+m)$ equações e $(n+m)$ incógnitas e, em geral, não é linear.

Os extremos da função f na variedade M, definida por $F(x) = 0$, encontram-se no conjunto de soluções do sistema acima, mas nem todas as soluções são extremos de f.

Os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ são chamados multiplicadores de Lagrange. À estratégia para deduzir o sistema de equações chama-se método dos multiplicadores de Lagrange.

exemplo: Para o caso da elipse

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad ; \quad F(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$$

e portanto,

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla F(x,y) \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2y = \frac{\lambda y}{2} \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ y(4-\lambda) = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \vee \ \lambda = 1 \\ y = 0 \ \vee \ \lambda = 4 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

, cuja solução é o conjunto de pontos $\{(0,-2), (0,2), (-1,0), (1,0)\}$. Os dois primeiros são os mais afastados da origem e outros dois são os mais próximos.

exemplo: Seja L o conjunto definido pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$$

Quais os pontos de L mais próximos do ponto $(0,0,1)$?

A função $\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}$ é a distância de um ponto (x,y,z) ao ponto $(0,0,1)$. No entanto, esta função não é diferenciável no ponto $(0,0,1)$ e, dado que no método dos multiplicadores de Lagrange as funções envolvidas devem ser de classe C^1, não é elegível para a solução do problema.

O quadrado da distância definido pela função $f(x,y,z) = x^2+y^2+(z-1)^2$, de classe C^1, resolve o mesmo problema.

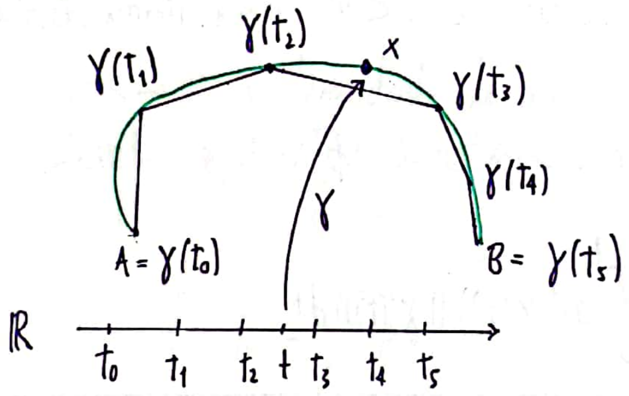
Assim, sejam $F_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2$ e $F_2(x,y,z) = y - x$

Portanto,

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla F_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla F_2(x,y,z) \\ F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda_1 x - \lambda_2 \\ 2y = 2\lambda_1 y - \lambda_2 \\ 2(z-1) = 2\lambda_1 z \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$$

Fazendo as contas, chega-se que os pontos a considerar são $(0,0,-\sqrt{2})$ e $(0,0,\sqrt{2})$. É claro que o mais próximo de $(0,0,1)$ é o ponto $(0,0,\sqrt{2})$

- Integrais em variedades



→ Comprimento de uma linha

Como o comprimento da linha poligonal é dado por

$$\sum_{k=1}^{N} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

o comprimento da linha T será definido por

$$\ell(T) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=1}^{N} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \right\}$$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)\,dt$$

e, portanto,

$$\sum_{k=1}^{N} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$

Definição

Chama-se comprimento de uma linha $T \subset \mathbb{R}^n$, descrita por um caminho $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, com $b > a$, de classe C^1, ao integral

$$l(T) = \int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt$$

Definição

Seja $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar, e $T \subset \mathbb{R}^n$ uma linha descrita pelo caminho $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

Chama-se integral de linha do campo escalar ϕ ao longo da linha T ao integral,

$$\int_T \phi = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \| \gamma'(t) \| \, dt$$

Chamando elemento de comprimento do arco a

$$ds = \| \gamma'(t) \| \, dt$$

o integral de linha de um campo escalar ϕ ao longo da linha T será representado pelo símbolo $\int_T \phi \, ds$, ou seja,

$$\int_T \phi \, ds = \int_T \phi = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \| \gamma'(t) \| \, dt$$

em particular,

$$l(T) = \int_T ds$$

Digitalizada com CamScanner

Aplicações

De seguida apresentam-se alguns campos escalares com interesse nas aplicações

a) Comprimento de uma linha

Seja $\phi \equiv 1$. Então, o integral de linha de ϕ

$$\int_T \phi \, ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \ell(T)$$

é o comprimento da linha

b) Massa de um fio

Seja $\phi : S \to \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de comprimento do material que constitui um fio descrito por $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Então, o integral de linha de ϕ,

$$\int_T \phi \, ds = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = M$$

c) Centro de Massa

Seja $\sigma : S \to \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de comprimento do material que constitui um fio de massa M descrito por $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e seja

$$\phi_i(x) = \frac{1}{M} x_i \sigma(x); \quad i = 1, 2, \dots, n$$

O centro de massa é o ponto de coordenadas $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ calculadas da forma seguinte:

$$\bar{x}_i = \int_T \phi \, ds = \int_a^b \phi_i(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

d) Momento de Inércia relativo a uma Linha Reta

Seja L uma linha reta, e $d_L(x)$ a distância do ponto $x \in \mathbb{R}^n$ à linha L. O momento de inércia da linha T relativo à reta L é o integral de linha da função $\phi(x) = \sigma(x) \, d_L^2(x)$, ou seja,

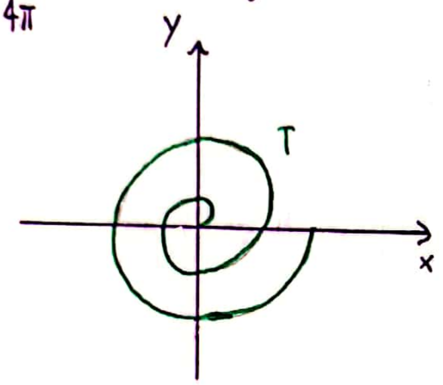
$$I_L = \int_T \phi \, ds = \int_a^b \sigma(\gamma(t)) \, d_L^2(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$$

exemplo: Seja Γ um fio de um material cuja densidade de massa é dada por

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

e tem a configuração de uma espiral descrita por $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t)$

$0 < t < 4\pi$



Então:

$$\|\gamma'(t)\| = \|(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)\| = \sqrt{1+t^2}$$

$$\sigma(\gamma(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

e a massa de Γ é dada por

$$M = \int_\Gamma \sigma\, ds = \int_0^{4\pi} \sigma(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = 4\pi$$

A coordenada $\bar{y}$ do centro de massa é dada por

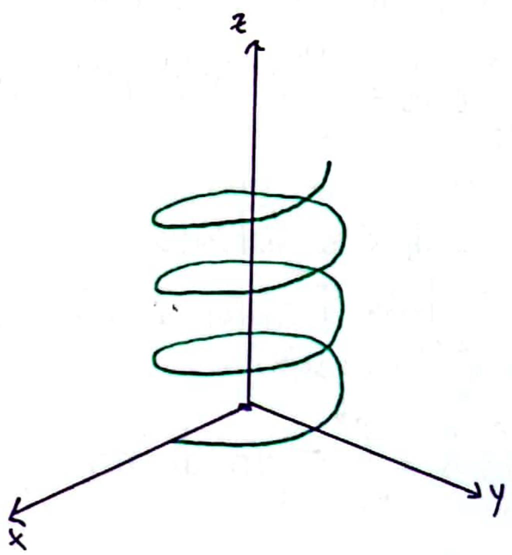
$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\sigma\, ds = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} t\sin t \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} t\sin t\,dt = -1$$

exemplo: Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ um fio de um material com densidade de massa definida por $\sigma(x,y,z) = z$ e cuja configuração é uma hélice cilíndrica, descrita pela função,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)\ ;\ 0 < t < 6\pi$$

Então $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$ e o momento de inércia de Γ relativo ao eixo Oz é dado pelo integral de linha

$$I_z(\Gamma) = \int_\Gamma z(x^2+y^2)\,ds = \sqrt{2}\int_0^{6\pi} t\,dt = 18\sqrt{2}\pi^2$$



Helíce cilíndrica em $\mathbb{R}^3$

⇒ integral de superfície de um campo escalar

Definição

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade de dimensão 2, e $g: T \to \mathbb{R}^3$ a respetiva parametrização, com $T \subset \mathbb{R}^2$. Então a área de S é dada pelo integral

$$Vol_2(S) = \int_T \sqrt{\det Dg(t)^T Dg(t)}\, dt$$

Definição

Define-se o integral de um campo escalar $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sobre uma variedade S de dimensão p como sendo o integral

$$\int_S \phi = \int_T \phi(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^T Dg(t)}\, dt,$$

em que $g: T \to \mathbb{R}^n$ é uma parametrização do S, com $T \subset \mathbb{R}^p$

São importantes os casos em $p=1$ em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (comprimento de uma linha) ou $p=2$ em $\mathbb{R}^3$ (área de uma superfície).

Se $p=1$,

$$\sqrt{\det [Dg(t)^T Dg(t)]} = \|g'(t)\|$$

se $p=2$,

$$\sqrt{\det [Dg(t)^T Dg(t)]} = \left\| \frac{\partial g}{t_1} \times \frac{\partial g}{t_2} \right\|$$

<u>Nota importante</u>: A definição do integral de um campo escalar sobre uma variedade não depende da parametrização.

Aplicações:

a) Área: Seja $\phi = 1$. Então, o integral de ϕ é a área de S:

$$Vol_2(S) = \int_S \phi \, dS = \iint_T \sqrt{\det Dg(u,v)^T Dg(u,v)} \, du \, dv$$

b) Massa: Se S representa uma folha de um material, com densidade de massa por unidade de área σ, então, o integral de σ é a massa de S:

$$M = \int_S \sigma \, dS = \iint_T \phi(g(u,v)) \sqrt{\det Dg(u,v)^T Dg(u,v)} \, du \, dv$$

c) Centro de Massa: Seja S uma folha de um material, com densidade de massa σ. Então, o centro de massa de S é o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ determinadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_S x \sigma \, dS = \frac{1}{M} \iint_T g_1(u,v) \sigma(g(u,v)) \sqrt{\det Dg(u,v)^T Dg(u,v)} \, du \, dv,$$

d) Momento de Inércia relativo a Uma Linha Reta: Seja L uma linha reta e S uma folha de um material com densidade σ. Então, o momento de inércia de S relativo a L é o integral,

$$I_L(S) = \int_S \sigma d_L^2 \, dS = \iint_T \sigma(g(u,v)) \, d_L^2(g(u,v)) \sqrt{\det Dg(u,v)^T Dg(u,v)} \, du \, dv$$

em que d_L designa a distância à linha L

Exemplo:

O paraboloide $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z < 1\}$ pode ser descrito em coordenadas cilíndricas, pelo equação $z = \rho^2$

Seja $g: T \to \mathbb{R}^3$ a função definida por

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2)$$

em que $T =]0,1[\times]0,2\pi[\subset \mathbb{R}^2$

Esta função é de classe C^1, injetiva, e a sua derivada

$$Dg(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 2\rho & 0 \end{bmatrix}$$

Tem característica igual a 2. Para além disso,

$$g(T) = P \setminus \{(x,y,z) \in P : x \geq 0 ; y = 0\} = P \setminus N$$

A função g é uma parametrização do conjunto $P\setminus N$. Note-se que N é a imagem de dois segmetos de reta da fronteira de T, correspondentes a $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.

Dado que,

$$Dg(\rho,\theta)^t Dg(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} 1+4\rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

então:

$$\sqrt{\det Dg(\rho,\theta)^t Dg(\rho,\theta)} = \rho\sqrt{1+4\rho^2}$$

A área de superfície P, é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_2(P) = \mathrm{Vol}_2(P\setminus N) &= \iint_T \sqrt{\det Dg(\rho,\theta)^t Dg(\rho,\theta)}\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{6}\int_0^1 12\rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho \\ &= \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right) \end{aligned}$$

■ Teorema Fundamental do cálculo

Definição

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $F: S \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial, e $T \subset S$ uma linha descrita pelo caminho $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1. Ao integral

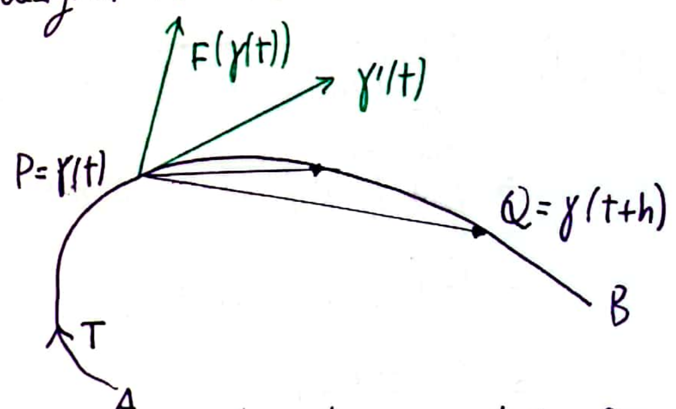
$$\int_T F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

chama-se integral de linha do campo vetorial F ao longo do caminho γ, ou trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho γ

Para entender de maneira simples esta definição, basta considerar que T é o segmento de reta entre os pontos A e B, sendo a força F um campo vetorial constante. Nesse caso, $\gamma(t) = A + t(B-A)$, com $0 \leq t \leq 1$ e, portanto, o trabalho dado por

$$\int_T F \cdot d\gamma = \int_0^1 F \cdot (B-A)\, dt = F \cdot (B-A)$$

é o produto da força pelo deslocamento. Por vezes usa-se o símbolo $\int_T F$ para designar esse trabalho.



Tangente a uma linha. Definição de trabalho

Se T for a trajetória de uma partícula com massa m, então $F(\gamma(t)) = m\gamma''(t)$, e

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_a^b m\gamma''(t) \cdot \gamma'(t)dt$$

$$= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)$$

$$= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\|\gamma'(t)\|^2 dt$$

$$= E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c$$

em que $E_c = \frac{m}{2}\|\gamma'(t)\|^2$ é a energia cinética da partícula no instante t ou na posição $\gamma(t)$.

Então, o trabalho realizado pela força F ao longo da trajetória da partícula é a variação da respetiva energia cinética.

exemplo: Considere-se o campo vetorial $F(x,y,z) = (xyz, x^2z, xy)$

Esta linha pode ser descrita pelo caminho $g(t) = (t, 2t, t)$, com $t \in [0,1]$

Assim,

$$F(g(t)) = (2t^3, t^3, 2t^2) \; ; \; g'(t) = (1,2,1)$$

e o trabalho de F ao longo de T é dado por

$$\int_R F \cdot dg = \int_0^1 (4t^3 + 2t^2)dt = \frac{5}{3}$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\phi: S \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1, e $T \subset S$ a linha definida pelo caminho regular $g: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ entre o ponto A e o ponto B

Então:

$$\int_T \nabla\phi \cdot dg = \phi(B) - \phi(A)$$

De facto, sendo $A = g(a)$ e $B = g(b)$, então:

$$\begin{aligned}\int_T \nabla\phi \cdot dg &= \int_a^b \nabla\phi(g(t)) \cdot g'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(g(t))\, dt \\ &= \phi(g(b)) - \phi(g(a)) \\ &= \phi(B) - \phi(A)\end{aligned}$$

Definição

Dado um campo vetorial $F: S \to \mathbb{R}^n$, se existir um campo escalar $\phi: S \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(x) = \nabla\phi(x)$$

diz-se que F é um campo gradiente e que ϕ é o potencial escalar de F.

i. O integral de linha de um campo gradiente não depende do caminho. Depende apenas do ponto inicial A e do ponto final B

ii. Se a linha T for fechada, então:

$$\int_T F \cdot dg = \int_T \nabla\phi \cdot dg = \phi(B) - \phi(A) = 0$$

iii A um campo gradiente também se chama campo conservativo

Definição

A um campo vetorial F de classe C^1, tal que

$$D_j F_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = D_i F_j \;;\; \forall i \neq j$$

chama-se campo fechado

Se um campo não for fechado, não é certamente gradiente

exemplo:

Seja $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\int \frac{x}{x^2+y^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+y^2)$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+y^2) + h(y)$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + h(y)\right) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{y}{x^2+y^2} + h'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow h(y) = 0$$

Logo $\phi(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ é o potencial do campo escalar ϕ, sendo F um campo gradiente.

Como um campo ser fechado não implica ser campo gradiente. Põe-se então o problema de saber quais os conjuntos em que um campo vetorial fechado é gradiente.

Definição

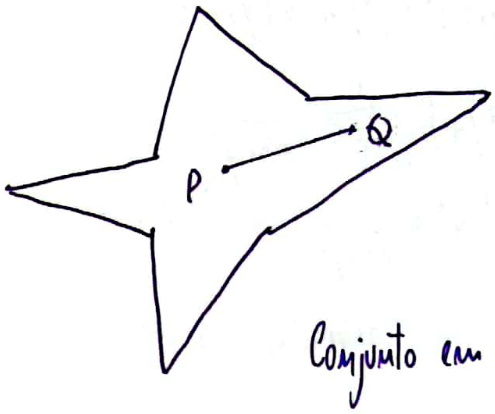
Diz-se que um conjunto aberto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo se qualquer linha fechada $T \subset S$ pode ser transformada continuamente num ponto $P \in S$, ou seja, se existe uma função $H: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ contínua, com as seguintes propriedades,

1. $H(0,t) = P; \quad t \in [0,1]$
2. $H(1,t) = \gamma(t); \; t \in [0,1]$
3. $H(s,0) = H(s,1); \; s \in [0,1]$,

em que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ é um conjunto que descreve a linha T. Nestas circunstâncias diz-se que a linha T é homotópica a um ponto.

Definição

Qualquer conjunto em estrela é simplesmente conexo. Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ diz-se em estrela, ou que é uma estrela se existir um ponto $P \in S$, tal que o segmento de reta $[P, Q]$ se encontra em S, para qualquer ponto $Q \in S$.



Conjunto em estrela

Teorema

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto simplesmente conexo, e $F: S \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1

Então o campo F é um gradiente, se e só se F for um campo fechado

- Teorema de Green no plano

Definição (Domínio Elementar)

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e limitado. Diz-se que D é um domínio elementar, se for descrito, simultaneamente, nas duas formas seguintes:

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) < y < g(x) \, ; \, a < x < b\}$, em que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são duas funções de classe C^1.

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(y) < x < \psi(y) \, ; \, c < y < d\}$, em que $\phi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ são duas funções de classe C^1

exemplo:

Um círculo em $\mathbb{R}^2$ é um domínio elementar, tal que:

$$f(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} \quad ; \quad -R < x < R$$

$$g(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad ; \quad -R < x < R$$

$$\phi(y) = -\sqrt{R^2 - y^2} \quad ; \quad -R < x < R$$

$$\psi(y) = \sqrt{R^2 - y^2} \quad ; \quad -R < x < R$$

Definição

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e limitado. Diz-se que D é um domínio quase regular, se for uma união finita de domínios elementares.

Teorema de Green

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio quase regular. e ∂D a sua fronteira. Seja $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo vetorial de classe C^1 cuja domínio contém D

Então:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_T P dx + Q dy$$

em que a linha ∂D é percorrida no sentido positivo

Ao integral de linha de um campo vetorial F sobre um caminho simples e fechado T chama-se circulação de F ao longo de T.

Corolário: A circulação de um campo vetorial fechado, de classe C^1, ao longo de uma linha fechada que limita um domínio quase regular é nula.

Sendo $F = (P, Q)$ um campo fechado, então $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ e, aplicando o teorema de Green ao conjunto limitado por T, obtém-se imediatamente,

$$\oint_T F \cdot d\gamma = \oint_T P dx + Q dy = 0$$

Digitalizada com CamScanner

Corolário: Seja $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo vetorial de classe C^1 e fechado. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio quase regular limitado por duas linhas fechadas T_1 e T_2, percorridas no mesmo sentido.

Então:

$$\int_{T_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{T_2} P\,dx + Q\,dy$$

exemplo:

Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por

$$F(x,y) = \left(-\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} \,,\, \frac{x}{x^2+(y-1)^2} \right)$$

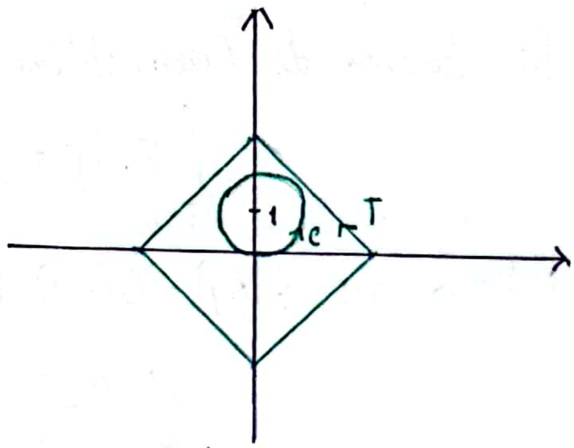
e seja T a fronteira do quadrilátero com vértices nos pontos

$$(3,0)\,,\ (0,3)\,,\ (-3,0)\,,\ (0,-3)$$

percorrida no sentido positivo e descrita por um caminho $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

Para calcular o integral de linha $\int_T F \cdot d\gamma$, considera-se a região limitada por T e pela circunferência C de raio igual a 1 e centro no ponto $(0,1)$ percorrida no sentido positivo e descrita pelo caminho

$$\gamma(t) = (\cos t,\ \sin t + 1)$$



Facilmente se verifica que o campo F é fechado e que a região considerada é um domínio quase regular.

Aplicando o teorema de Green, obtém-se

$$\int_T F \cdot d\gamma = \int_C F \cdot d\gamma$$

$$\int_C F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) = 2\pi$$

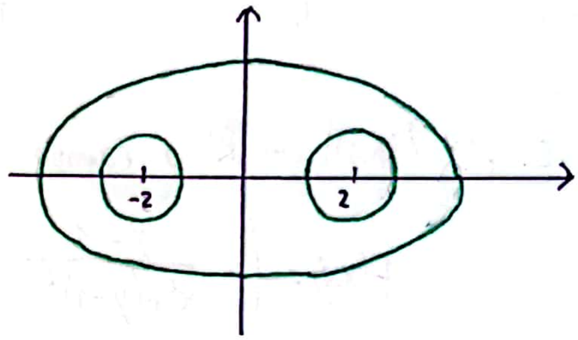
$$\Downarrow$$

$$\int_T F \cdot d\gamma = 2\pi$$

Exemplo: Seja $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(-2,0),(2,0)\} \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{(x-2)^2+y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2+y^2}\right) + \left(-\frac{y}{(x+2)^2+y^2}, \frac{x+2}{(x+2)^2+y^2}\right),$$

e seja T uma linha regular



Para calcular o integral de linha $\int_T F \cdot d\gamma$, considera-se a região limitada por T, pela circunferência C_1 de raio igual a 1 e centro no ponto $(2,0)$ e pela circunferência C_2 de raio igual a 1 e centro no ponto $(-2,0)$. Facilmente se verifica que o campo F é fechado e que a região considerada é um domínio quase regular.

Pelo teorema de Green, obtém-se

$$\int_T F \cdot d\gamma = \int_{C_1} F \cdot d\gamma + \int_{C_2} F \cdot d\gamma$$

Note-se que $F(x,y) = G(x,y) + H(x,y)$, sendo

$$G(x,y) = \left(-\frac{y}{(x-2)^2+y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2+y^2}\right)$$

e

$$H(x,y) = \left(-\frac{y}{(x+2)^2+y^2}, \frac{x+2}{(x+2)^2+y^2}\right)$$

Usando a parametrização $\gamma(t) = (2+\cos t, \sin t)$; $0<t<2\pi$ para C_1, obtém-se

$$\int_{C_1} G \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) = 2\pi$$

Usando a parametrização $\gamma(t) = (-2+\cos t, \sin t)$; $0 < t < 2\pi$ para C_2 obtém,

$$\int_{C_2} H \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) = 2\pi$$

Dado que o campo G é de classe C^1 no círculo limitado por C_2, do Teorema de Green, deduz-se que

$$\int_{C_2} G \cdot d\gamma = 0$$

Do mesmo modo, sendo H de classe C^1 no círculo limitado por C_1 tem-se

$$\int_{C_1} H \cdot d\gamma = 0$$

Portanto

$$\int_T F \cdot d\gamma = \int_{C_1} G \cdot d\gamma + \int_{C_2} G \cdot d\gamma + \int_{C_1} H \cdot d\gamma + \int_{C_2} H \cdot d\gamma = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$

- Teorema da divergência

O Teorema da divergência ou teorema de Gauss relaciona a divergência de um campo vetorial num domínio com o respetivo fluxo, através de uma superfície que limita o referido domínio

Definição

Ao integral

$$\phi = \int_S F \cdot v = \int_T F(g(t)) \cdot v(g(t)) \sqrt{\det D_g(t)^T D_g(t)}\, dt$$

em que $v(x)$ designa a normal (unitária) a S no ponto $x \in S$, chama-se fluxo do campo vetorial F através de S, segundo a normal v.

- Se F for perpendicular à direção normal a S, não passarão partículas através dela. O número de partículas que passam através de S será maior, se F for perpendicular a S.

—,, —

1) Uma normal unitária no ponto $x = g(t)$ é dada por

$$v(g(t)) = \frac{D_1 g(t) \times D_2 g(t)}{\| D_1 g(t) \times D_2 g(t) \|}$$

2) $$\sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} = \| D_1 g(t) \times D_2 g(t) \|$$

Portanto

$$v(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} = D_1 g(t) \times D_2 g(t)$$

ou seja, o fluxo de F é dado pela formula

$$\boxed{\int_S F \cdot v = \int_T F(g(t)) \cdot D_1 g(t) \times D_2 g(t) \, dt}$$

exemplo:

Considere-se o campo vetorial $F(x,y,z) = (x,y,z)$ e a superfície cilíndrica S definida pela equação $x^2+y^2=1$, tal que $0<z<2$

Seja v a normal unitária a S, que no ponto $(0,1,1)$ tem segunda componente positiva.

Da equação $x^2+y^2=1$ determina-se a normal

$$v(x,y,z) = \frac{(2x, 2y, 0)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = (x,y,0)$$

e portanto $F(x,y,z) \cdot v(x,y,z) = x^2+y^2 = 1$

Assim, o fluxo de F através de S, segundo a normal v, é dado por

$$\int_S F \cdot v = \mathrm{vol}_2(S) = 4\pi$$

Definição

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ um aberto. Dado um campo vetorial $F: S \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1, a divergência de F é o campo escalar $\operatorname{div} F: S \to \mathbb{R}$, definido por

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Definição

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e limitado. Diz-se que D é um domínio elementar, se for definido, simultaneamente, das três seguintes maneiras:

a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \phi_1(x,y) < z < \phi_2(x,y) ; (x,y) \in T_1\}$, em que ϕ_1 e ϕ_2 são funções de classe C^1, e definidas num aberto limitado $T_1 \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira é uma linha regular T_1. Na direção z, o conjunto D encontra-se entre dois gráficos de classe C^1.

b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \psi_1(y,z) < x < \psi_2(y,z) ; (y,z) \in T_2\}$, em que ψ_1 e ψ_2 são funções de classe C^1, e definidas num aberto limitado $T_2 \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira é uma linha regular T_2. Na direção x, o conjunto D encontra-se entre dois gráficos de classe C^1

c) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \eta_1(x,z) < y < \eta_2(x,z) ; (x,z) \in T_3\}$, em que η_1 e η_2 são funções de classe C^1, e definidas num aberto limitado $T_3 \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira é uma linha regular T_3. Na direção y, o conjunto D encontra-se entre dois gráficos de classe C^1

Teorema de Gauss

Sejam

1) $D \subset \mathbb{R}^3$ um domínio quase regular, e

2) $F : A \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1, sendo $A \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, tal que $\bar{D} \subset A$

Então:

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \cdot \nu$$

em que ν é a normal unitária e exterior à fronteira do conjunto D.

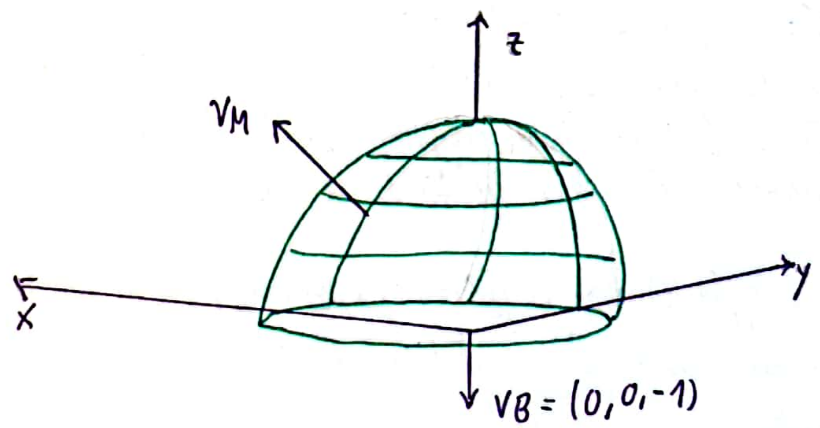
exemplo:

Seja M a superfície definida por

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\},$$

e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vetorial dado por

$$F(x,y,z) = (x, y, -z)$$



Para calcular o fluxo de F através de M, segundo a normal que no ponto $(0,0,1)$ tem terceira componente positiva, aplica-se o teorema da divergência no domínio.

$$D = \{(x,y,z) : 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}$$

Facilmente se verifica que D é um domínio quase regular cuja fronteira é a união de duas superfícies, M e B, em que

$$B = \{(x,y,z) : z = 0 \,;\, x^2+y^2 < 1\}$$

Como $\operatorname{div} F = 1$, do teorema da divergência vem

$$\operatorname{vol}_3(D) = \int_M F \cdot \nu_M + \int_B F \cdot \nu_B$$

Mas $z=0$ em B, e a normal unitária e exterior é o vetor $\nu_B = (0,0,-1)$. Assim, em B, tem-se $F \cdot \nu_B = (x,y,0)\cdot(0,0,-1) = 0$, ou seja,

$$\int_B F \cdot \nu_B = 0$$

Portanto

$$\int_M F \cdot \nu_M = \operatorname{vol}_3(D) = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

- Teorema de Stokes

O teorema de Stokes relaciona dois conceitos diferentes, a circulação ou trabalho de um campo vetorial numa linha e o fluxo do respetivo rotacional, através de uma superfície cuja fronteira ou bordo contém a linha referida.

Definição

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2 (superfície), e $A \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, tal que $S \subset A$. S é orientável, se existir um campo vetorial contínuo $\nu : A \to \mathbb{R}^3$, tal que, em cada ponto $x \in S$, o vetor $\nu(x)$ é unitário e normal a S. Também se diz que ν define uma orientação em S.

Nota: A banda de Möbius não é orientável

exemplo: Seja S uma variedade-2 dada pelo conjunto de nível zero de uma função $F : A \to \mathbb{R}$, de classe C^1, definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$. Tal que $\nabla F(x,y,z) \neq 0$ em S. Então, o campo vetorial, definido por

$$\nu(x,y,z) = \frac{\nabla F(x,y,z)}{\|\nabla F(x,y,z)\|},$$

é contínuo, unitário e normal a S em cada ponto $(x,y,z) \in S$, ou seja, S é orientável

Definição

Diz-se que uma Variedade-2, $S \subset \mathbb{R}^3$, tem uma orientação induzida pela parametrização $g: T \to \mathbb{R}^3$, se for dada pela normal ν definida por

$$\nu = \frac{D_1 g \times D_2 g}{\| D_1 g \times D_2 g \|}$$

Definição

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície. Diz-se que um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ pertence ao interior de S, se existir um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, um aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e uma parametrização $g: D \to \mathbb{R}^3$, tais que

$$p \in g(D) = S \cap V$$

Em termos simples, um ponto pertence ao interior de uma superfície S, se estiver na imagem de alguma parametrização de S

Definição

Chama-se fronteira ou bordo da superfície S à linha descrita pelo caminho $g \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, isto é,

$$\partial S = g(\partial D) = g(\gamma([a,b]))$$

Supondo que a orientação de S é induzida pela parametrização $g: D \to \mathbb{R}^3$, ou seja, a normal em S é dada por

$$\nu = \frac{D_1 g \times D_2 g}{\| D_1 g \times D_2 g \|},$$

diz-se que a orientação ou sentido do percurso

—"—

Na prática, a orientação de uma superfície orientável S pode ser dada através da célebre regra da mão direita. Supondo a mão direita fechada, com o polegar levantado e apoiada sobre S, a normal ν é dada pelo polegar e o sentido de percurso no bordo ∂S é indicado pelos restantes dedos.

Definição

Ao campo vetorial definido por

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

chama-se rotacional do campo F

Da definição, é claro que um campo vetorial F, tal que $\text{rot} F = 0$, é um campo fechado. Nesse caso também se diz que o campo F é irrotacional

O teorema de Stokes estabelece que o fluxo do rotacional de um campo vetorial F, de classe C^1, através de uma superfície orientável S é o trabalho realizado por F ao longo da fronteira ou bordo de S cuja orientação é compatível com a de S. É usual designar este trabalho por circulação.

Teorema de Stokes

Seja $F: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1, sendo A um aberto, e $S \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2 orientável, tal que $S \cup \partial S \subset A$. Então:

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \nu = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

onde γ é um caminho regular simples que descreve a linha ∂S com orientação compatível com a de S.

O teorema de Stokes pode ser usado para resolver vários tipos de problemas, que serão ilustrados nos exemplos.

a) Determinar ou calcular o fluxo rotacional de um campo F através de uma superfície S orientável. Da igualdade vem,

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \nu = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

e, portanto, deve ser calculado o trabalho de F ao longo do bordo ∂S. Neste caso, o problema está na descrição do bordo da superfície

b) Determinar ou calcular o trabalho de F ao longo de uma linha fechada T. Se existir uma superfície S e N linhas fechadas $T_1, T_2, \ldots \cup T_N$, tais que

$$\partial S = T \cup T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_N,$$

então da igualdade vem,

$$\int_T F \cdot d\gamma = \iint_S \text{rot } F \cdot \nu - \sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} F \cdot d\gamma_k$$

em que γ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ é o caminho que descreve a linha T_k

Neste caso, o problema é a determinação de uma superfície cujo bordo contenha a linha T.

Note-se que, se rot $F = 0$ (campo fechado), então:

$$\int_T F \cdot d\gamma + \sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} F \cdot d\gamma_k = 0$$

c) Determinar ou calcular o fluxo do rotacional de um campo vetorial F através de uma superfície S orientável. Da igualdade, é claro que, fazendo F = rot A, obtém-se

$$\iint_S F\cdot\nu = \iint_S \text{rot}\, A\cdot\nu = \int_{\partial S} A\cdot d\gamma$$

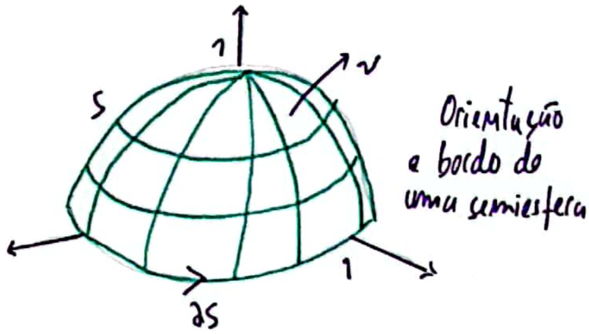
trata-se de determinar um campo vetorial A, tal que F = rot A, e o bordo da superfície S para calcular o trabalho de A em ∂S

Nota: Para aplicar o teorema de stokes, a linha deve ser o bordo de uma superfície orientável, e o campo F deve ser de classe C^1 num conjunto aberto que contenha a superfície

exemplo:

Seja $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vetorial definido por

$$F(x,y,z) = (y, -x, e^{xz})$$



e S a semiesfera

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1 \,;\, z>0\}$$

Sendo o conjunto de nível zero da função $H(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, a superfície S é orientável. A respetiva fronteira ou bordo é a linha

$$\partial S = \{(x,y,z) : z=0 \,,\, x^2+y^2=1\}$$

Seja ν a normal que orienta a superfície S, e tal que $\nu(0,0,1) = (0,0,1)$

Sendo S orientada pela normal ν, pela regra da mão direita, o bordo ∂S deve ser percorrido no sentido positivo.

Assim, ∂S deve ser descrita pelo caminho

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) \;;\; 0 \le t \le 2\pi$$

Usando o teorema de stokes, obtém-se

$$\iint_S \text{rot}\, F\cdot\nu = \int_{\partial S} F\cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, 1)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\, dt = -2\pi$$

Formulário - Calculo Diferencial e Integral 2

Duarte Sá Morais

June 9, 2021

1 Diferenciabilidade

Como calcular a diferenciabilidade:

$$\lim_{(h,k)\to(a,b)} \frac{||f(a+h,b+k)-f(a,b)-\nabla f(a,b)\cdot(h,k)||}{||(h,k)||}=0 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(a,b)} \frac{||f(a+h,b+k)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot k||}{||(h,k)||}=0 \tag{2}$$

Derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,k+b)-f(a,b)}{k} \tag{4}$$

Derivada de f no ponto a segundo o vetor v:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+v)-f(a)}{h} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow Dvf(a)=\nabla f(a)\cdot(v) \tag{6}$$

Teorema da Derivada da Função Composta:

$$D(f\circ g)(x)=Df(g(a))\cdot Dg(a) \tag{7}$$

Condições:

Diferenciável $\Rightarrow$ Contínua
Não Contínua $\Rightarrow$ Não Diferenciável
Ter derivada $\not\equiv$ Diferenciável

2 Limites

1)Experimentar para algumas retas
2)Fazer desigualdades para provar o limite

3 Extremos

1)Calcular a Hessiana
2)Ver quando $Df(x,y,z)=0$ (pontos críticos)
3)$|\nabla f(x,y,z)-\lambda\cdot I|=0$
4)Se todos os λ são positivos $\Rightarrow$ Mínimo de f. Se todos os λ são negativos $\Rightarrow$ Máximo de f. Se tiver λ positivos e negativos é um ponto de sela e não existe extremo nesse ponto.

4 Integrais

1)Tentar visualizar em 3D
2)Senão der, fazer cortes
3)Senão der, ir ao geogebra
4)Senão der, CHORAR

Teorema de Fubini:

$$\int_A \int_B f(x,y)dydx = \int_B \int_A f(x,y)dxdy \tag{8}$$

Aplicações do Fubini:

$$Massa(R) = \int \int_R \sigma(x,y)dydx \tag{9}$$

$$Area(R) = \int \int_R f(x,y)dydx \tag{10}$$

$$Carga(R) = \int \int_R \alpha(x,y)dydx \tag{11}$$

$$MomentoInercia(R) = \int \int_R dL^2(x,y) \cdot \sigma(x,y)dydx \tag{12}$$

sendo σ a densidade de massa, f a densidade de massa , α a densidade de carga e d_L a distâcia ao eixo

Centro de Massa, caso seja um centróide $\Rightarrow \sigma(x,y) = 1$

$$\bar{x} = \frac{1}{Massa(R)} \int \int_R x \cdot \sigma(x,y)dxdydz \tag{13}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{Massa(R)} \int \int_R x \cdot \sigma(x,y)dxdydz \tag{14}$$

5 Mudança de Variáveis

Teorema Mudança de Variáveis:

$$\int_X f(x)dx = \int_T f(g(t)) \cdot |detDg(t)|)dt \tag{15}$$

Coordenadas Polares: $x = r \cdot cos(\theta); y = r \cdot sin(\theta)$ $\;,detD(r,\theta) = r$
Coordenadas Cilíndricas: $x = \rho \cdot cos(\theta); y = \rho \cdot sin(\theta); z = z$ $\;,detD(\rho,\theta,z) = \rho$
Coordenadas Esféricas: $x = r \cdot sin(\phi) \cdot cos(\theta); y = r \cdot sin(\phi) \cdot sin(\theta); z = r \cdot cos(phi)$ $\;,detD(\rho,\theta,\phi) = r^2 \cdot sin\phi$

6 Função Inversa.Função Implícita

Teorema da Função Inversa:

1)f(a,b) = 0 , apenas uma solução
2)det Df(a,b) $\neq$ 0

Permite concluir que f é localmente invertível em torno de a e $Df^{-1}(b) = [Df(a)]^{-1}$

Teorema da Função Implícita:

1)F(a,b) = 0 , apenas uma solução
2)det DyF(a,b) $\neq$ 0

Permite concluir que existe f tal que $y = f(x)$ e $f'(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

7 Variedades e Parametrizações

Saber se é uma variedade:

1)Definir $F(x,y)=0$, $\Re^n \rightarrow \Re^m$ a partir do conjunto V
2)Calcular $DF(x,y)$
3)Verificar se a característica é $n-m$; $dim(V)=n-car(DF)$

Resolver o problema dos extremos condicionados (Calcular extremos de uma função f restrita a uma certa variedade):

1)Calcular $Df(x,y)$ e $DF(x,y)$
2)Calcular os extremos a partir do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda 1 \cdot \nabla F1(x) + \lambda 2 \cdot \nabla F2 + ... + \lambda m \cdot \nabla Fm \\ F(x,y)=0 \end{cases}. \tag{16}$$

sendo $\lambda 1, \lambda 2, ..., \lambda$n os multiplicadores de lagrange. Comprimento de uma linha:

$$l(t) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt \tag{17}$$

Centro de Massa:

$$\int_T \phi = \int_a^b \phi(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt \tag{18}$$

Integral de linha de um campo escalar :

$$\int_T \phi = \int_a^b \phi(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt \tag{19}$$

Aplicações:

$$M = \int_T \sigma = \int_a^b \sigma(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt \tag{20}$$

$$I_L = \int_T \phi = \int_a^b \sigma(\gamma(t)) d_L^2(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt \tag{21}$$

$$\bar{x i} = \int_T \sigma = \int_a^b \sigma i(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt; \qquad i=1,2,...,n. \tag{22}$$

Volume de uma variedade de dim-2:

$$vol(S) = \int_T \sqrt{det Dg(t)^t \cdot Dg(t)} dt \tag{23}$$

Integral de um campo escalar

$$\int_S \phi = \int_T \phi(g(t)) \sqrt{det Dg(t)^t \cdot Dg(t)} dt \tag{24}$$

Se dimensão $=1$, $\sqrt{det Dg(t)^t \cdot Dg(t)} = ||g'(t)||$

Se dimensão $=2$, $\sqrt{det Dg(t)^t \cdot Dg(t)} = ||\frac{\partial g}{t1} \times \frac{\partial g}{t2}||$

8 Teorema Fundamental do Cálculo

Trabalho:

$$\int_S F \cdot d\gamma = \int_T F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \tag{25}$$

Teorema Fundamental do cálculo:

$$\int_S \nabla\phi \cdot dg = \phi(B) - \phi(A) \tag{26}$$

Se for campo gradiente:

$$F(x) = \nabla\phi(x) \tag{27}$$

Condições:

$$\begin{gathered} \text{Campo Gradiente} \Rightarrow \text{Campo Fechado} \\ \not\Leftarrow \\ \text{Campo Gradiente} \Rightarrow \text{Campo Conservativo} \\ \Leftarrow \\ \text{Campo Fechado e Conjunto Estrela} \Rightarrow \text{Campo Gradiente} \end{gathered}$$

Saber se é campo conservativo/gradiente:

1)Ver se é um conjunto fechado, isto é, se $\frac{\partial x_j}{x_i} = \frac{\partial x_i}{x_j}, \ \forall_{j,k}$
2)Calcular o potencial, com auxílio a integrais
3)Se for muito dificil, ver se é um conjunto em estrela e verificar se é fechado

9 Teorema de Green

Teorema de Green:

$$\oint_{\partial R} F \cdot d\gamma = \int_R \frac{\partial F_2}{x} - \frac{\partial F_1}{y} dxdy \tag{28}$$

Se $\frac{\partial F_2}{x} - \frac{\partial F_1}{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \oint_{\partial R} F \cdot d\gamma =$ Área(R)

Se $\frac{\partial F_2}{x} = \frac{\partial F_1}{y}$ e o conjunto for fechado $\quad \Rightarrow \quad \oint_{\partial R} F \cdot d\gamma = 0$

10 Teorema de Gauss/Divergência

Teorema de Gauss:

$$\int_D divF = \int_{\partial D} F \cdot v \tag{29}$$

Calcular o fluxo de uma superfície num dado campo F:

1)Dividir a superfície em dominio regulares
2)Calcular $divF$ que é igual a $\frac{\partial F_1}{x} + \frac{\partial F_2}{y} + \frac{\partial F_3}{z}$
3)Calcular o fluxo individualmente para cada domínios regulares
4)Somar todos os fluxos para obter o fluxo de toda a superfície
5)Caso não dê, definir a superficie num conjunto de nível zero S, calcular $v = \frac{\nabla S(x,y,z)}{||\nabla S(x,y,z)||}$ e calcular o integral $\int_{\partial D} F \cdot v$

Calcular o fluxo através de uma parametrização v:

$$\int_S F \cdot v = \int_T F(g(t)) \cdot D_1 g(t) \times D_2 g(t)dt \tag{30}$$

11 Teorema de Stokes

Teorema de Stokes:

$$\int_S rotF \cdot n = \oint_{\partial S} F \cdot dg \tag{31}$$

Calcular o fluxo rotacional através de uma superfície orientável num dado campo F:

rot F $= (\frac{\partial F_3}{y} - \frac{\partial F_2}{z}, \frac{\partial F_1}{z} - \frac{\partial F_3}{x}, \frac{\partial F_2}{x} - \frac{\partial F_1}{y})$

1)F rotacional $\Rightarrow divF = 0$
2)$divF = 0$, domínio em estrela $\Rightarrow F$ rotacional