Álgebra Linear

Matriz real complexa: é um quadro de números ou escalares reais

Matriz do tipo $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{nº linhas}}}{\underline{K}} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nº colunas}}}{\underline{m}}$

Entradas da matriz $\rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{"elementos" da matriz}}}{a_{ij}}$ (i é a linha)(J é a coluna)

Linha da matriz i: $L_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{iJ} \dots a_{im}]$

Coluna da matriz j: $C_J = \begin{bmatrix} a_{1J} \\ a_{2J} \\ \vdots \\ a_{iJ} \\ \vdots \\ a_{KJ} \end{bmatrix}$

- Uma matriz é representada por $[a_{ij}]$ ou $[a_{ij}]$ $\begin{matrix} i = 1, \dots, K \\ j = 1, \dots, m \end{matrix}$
- Matriz retangular $\rightarrow K \neq m$ (Matriz quadrada $\rightarrow K = m$ (de ordem m))
- Matriz coluna / vetor coluna $\rightarrow m = 1$
- Matriz linha / vetor linha $\rightarrow K = 1$

Matriz em escada de linhas: $\rightarrow$ ex: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

- Não existem linhas nulas acima de não nulas
- Sendo L_i e L_{i+1} duas linhas não nulas consecutivas de A, a primeira entrada da não nula de L_{i+1} está numa coluna à direita da coluna da primeira entrada não nula de L_i.

- A primeira entrada não nula de cada linha de uma matriz em escada de linhas é o pivô

Operações elementares
(sobre linhas de uma matriz)

- troca da linha L_i com a linha L_j (com $i \neq j$)
- Substituição da linha L_i por αL_i ($\alpha \neq 0$)
- Substituição da linha L_i por $L_i + \alpha L_j$ (α escalar e $i \neq j$)

Sistemas de equações lineares
(SEL)

- É uma conjunção de eq. lineares → termo independente do lado direito da eq

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n = b$$

Sistema Homogéneo $b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0$ → Sempre possível
$C.S = (0, \ldots, 0)$

Sistema não Homogéneo : Caso não sejam todos os termos independentes igual a zero

- Resolver um SEL é encontrar o conjunto solução geral do SEL, que é o conjunto de todas as sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n número que satisfazem as eq do SEL

- SEL equivalentes → mesma solução geral

Natureza do SEL

- possível e determinado : 1ª solução
- possível e indeterminado : + do que uma solução → infinitas
obrigatório
- Impossível → conjunto soluções vazio

Matriz associada a sistema de eq lineares

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{km} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz dos coeficientes}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz dos termos independentes}$$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{km} & b_k \end{array}\right] \rightarrow \underline{\text{Matriz aumentada}}$$

c/ ou s/ barra

- Para resolver um SEL → Usa-se a Matriz aumentada do sistema

SEL

Matriz aumentada do sistema

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=2 \\ 2x+y-z=2 \end{cases} \longrightarrow [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

- Ao aplicar operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada, obtém-se matriz aumentada de um SEL equivalente.

MEG → Método de eliminação de Gauss

- Serve para Matriz aumentada → Matriz em escada de linhas, para resolver o SEL

1 → Linhas nulas para baixo
2 → Linhas com primeira entrada ⊕ à esquerda vai para cima
3 → Reduzir a zero a primeira coluna da $L_2, L_3 \ldots$, usando a L_1 como base
4 → Reduzir a zero a segunda da $L_3 L_4 \ldots$, com base na $L_2 \ldots$

Quando se faz uma operação elementar, na conta, aparece em primeiro lugar a linha que temos a mudar.

Resolver SEL

1 - Matriz aumentada $[A|b]$

2 - Reduz-se $[A|b]$ a R (matriz em escada de linhas) com MEG

3 - Resolver SEL da matriz aumentada R

— " 2 " —

Característica de uma matriz (car A) → número de pivôs de A, quando está em escada de linhas.

Variáveis dependentes e independentes:

Dependentes → correspondem às colunas da Matriz com pivôs

Independentes → restantes variáveis ou livres

$x = 4z - 3$ variável independente

A solução do SEL é:

$$\{(-z, -z, -w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$$

Grau de indeterminação do SEL G.I é igual a:

- número de variáveis independentes: nº variáveis - nº variáveis dependentes
- número de colunas de A - car A

Soluções particulares, quando há infinitos conjuntos de solução cada um deles é uma solução particular (um valor de x, y, z)

Natureza do SEL → Possível car A = car $[A|b]$
→ Impossível car $A \neq$ car $[A|b]$

quando em pelo menos uma eq, temos 0 = número, esse número é pivô da matriz e está na coluna b, logo car(A) < car(A|b)

- Possível e determinado → Car A = nº colunas de A
  - ↳ G.I = 0
  - Um pivô por coluna

- Possível e indeterminado → car A < nº colunas de A
  - ↳ Infinitas soluções
  - ↳ G.I = nº colunas de A - Car A

. Se Car(A) = Car(A|b) → SEL é possível

. Se G.I ≠ 0, é indeterminado

Método de eliminação de Gauss-Jordan → Para resolver SEL

· Forma canónica de escada de linhas / forma reduzida de escada de linhas
↳ Matriz em escada de linhas
↳ Pivôs iguais a 1
↳ Em cada coluna com pivô, é tudo igual a zero, menos o pivô

Método

1) Aplicar MEG para ficar em escada de linhas
2) Pôr tudo a zero (menos pivôs) em cada coluna com pivô
↳ Começar pela coluna do pivô mais abaixo e à direita e pôr as entradas dessa coluna, mas linhas acima, tudo a zeros, com base na linha do último pivô
↳ Aplicar o mesmo para o pivô da linha acima até a última linha com pivôs
3) Transformar todos os pivôs no número 1
↳ com multiplicação por escalar

· Para uma matriz A, há várias matrizes em escada de linhas
· Para uma matriz A, há apenas uma matriz em escada de linhas na forma canónica

Cálculo Matricial

Adição → entre matriz do mesmo tipo / tamanho $K \times m$ em que:

$A+B = [c_{ij}]$ tal que: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ Somam as entradas respetivas

Multiplicar por escalar → $A = [a_{ij}]$, $\alpha A = [b_{ij}]$ tal que $b_{ij} = \alpha a_{ij}$
Multiplica cada entrada pelo escalar.

Propriedades
- comutativa / associativa / elemento neutro
- todo o A admite um simétrico $-A$
É único

- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
- $1A = A$

· Elemento neutro da adição é a matriz nula do tipo $K \times m$

· Elemento simétrico da matriz $A = [a_{ij}]$ é $-A = [-a_{ij}]$
Simétrico em cada entrada.

Multiplicação de matrizes

$m \times k \quad m \times k$ → Têm de ser iguais

- Para multiplicar A por b, nº de colunas de A é igual ao número de linhas de b
- Matriz que resulta tem número de linhas de A e de colunas de b

Linha i da matriz Ab faz-se recorrendo à linha i de A.

$$Ab = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

entrada (1,1) = $l_1 \times e_1$

Propriedades:

- Não é comutativa $AB \neq BA$
- $(AB)C = A(BC)$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B$

Equações Matriciais

tendo um SEL com n incognitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ podemos definir a matriz dos coeficientes

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Logo o SEL é representado por: $Ax = b$ ou $\underbrace{Ax = 0}_{\text{homogeneo}}$

Potências de matrizes

$A^n = \underbrace{A \cdot A \dots A}_{n}$ / $A^{n+m} = A^n \times A^m$ / $(A^n)^m = A^{n \times m}$

$A^0 = I \rightarrow$ se A é quadrada

$$\begin{matrix} 0 & -2 & \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \end{matrix} \quad -5$$

Matriz transposta: $A^T \rightarrow$ troca linhas com colunas

- $(A^T)^T = A$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha(A))^T = \alpha A^T$
- $\underbrace{(AB)^T = B^T A^T}_{\text{pela ordem contrária}}$

- Se $A = A^T \rightarrow$ matriz é simetrica (e tamb quadrada)

$a_{ij} = a_{ji} \rightarrow i \neq j$ diagonal espelho

- Se $A = -A^T \rightarrow$ matriz anti-simetrica $\rightarrow$ diagonal sempre zero

Regra: $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + (A - A^T)$
$= A^T + (-A^T)$

traço da matriz: $\text{tr}\, A = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$ → soma dos elementos da diagonal
↓
aplicável para matrizes quadradas

- Propriedades:
  - $\text{tr}(A+B) = \text{tr}\, A + \text{tr}\, B$
  - $\text{tr}(2A) = 2\, \text{tr}\, A$
  - $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$
  - $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Matriz Identidade

- Comuta com todas matrizes quadradas com o mesmo número de colunas

$I_m A = A = A I_m$

$B I_m = B = I_m B$

Matriz diagonal → se é quadrada com todas as entradas que não são diagonal, nulas.

A matriz identidade é qualquer matriz diagonal com todas as entradas da diagonal iguais a 1

↳ elemento neutro da multiplicação

Matriz inversa (A^{-1}) → sempre quadrada de ordem igual à ordem da matriz quadrada de A
↓
voltar a ser o referencial $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$

$A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1}$

- Pode não existir, se não houver nenhuma que satisfaça
  (não existe se: matriz tiver coluna nula
  matriz tiver linha nula)
- Ao existir matriz A^{-1}, é única e quadrada
- A é invertível ou não singular, se admite inversa.

Calcular matriz inversa de A

$\underbrace{[\ \ ]}_{A} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = I \longrightarrow [A|I] \left[\underbrace{\ \ }_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & & \end{matrix}}_{I} \right] \xrightarrow[\text{MEG-J}]{} \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \underbrace{\cdots}_{B} \right] = [I|B]$

. Verificar que $BA = I$, vdd p/ se A e B são matrizes quadradas de ordem m e I a matriz identidade de ordem m, então
. $A^{-1} = B$

$\longrightarrow [A|I] \xrightarrow[\text{MEG-J}]{} [I|A^{-1}]$

$AB = I$ sse $BA = I$

Propriedades

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$
- $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
- $A^{-n} = (A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$

Condições necessárias e suficientes de invertibilidade

. Se A é matriz quadrada de ordem n:

A é invertível $\Leftrightarrow$ car $A = n$ $\Leftrightarrow$ A pode ser transformada em I à custa de operações elementares $\Leftrightarrow$ forma reduzida de escada de linhas de A é I $\Leftrightarrow$ $Ax = 0$ só tem solução nula $\Leftrightarrow$ b é matriz coluna $\rightarrow$ SEL $Ax = b$ é poss e determinado

. Solução nula $\rightarrow$ trivial

Matrizes elementares

$\rightarrow$ Quando multiplicada à esquerda de uma matriz equivalem a executar operações elementares sobre a matriz.

$\rightarrow$ São o resultado da execução de uma (só 1) operação elementar em I

$P_{ij} \rightarrow$ Trocar L_i com L_j

$E_{ij}(\alpha) \rightarrow L_i + \alpha L_j$

$D_i(\alpha) \rightarrow \alpha L_i$

Inversa $\rightarrow$ fazem operações elementares para a matriz A voltar ao estado original depois de aplicadas operações elementares.

$$(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$$

$$(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

$$(D_i(\alpha))^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

P_{ij} $\quad\quad$ $E_{ij}(\alpha)$ $\quad\quad$ $D_i(\alpha)$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_i \\ L_j \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_i \\ L_j \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Se A é invertível, é um produto de matrizes elementares.
Logo pode ser transformada em I, à custa de op. elementares
↓
forma reduzida de escada de linhas.

Se A é invertível, $Ax=0$ só tem solução trivial

Se A é invertível, $Ax=b$ é possível e determinado, se b é $m\times 1$.

Determinantes

determinante $A \rightarrow |A| \rightarrow$ número real

det A

Regras:

- $\det(I)=1$
- $\det(P_{ij} A) = \det A$
- $\det(E_{ij}(\alpha) A) = \det A$
- $\det(D_i(\alpha) A) = \alpha \det A$
- $\det(A)=0 \Leftarrow$ 2 linhas iguais ou linha nula
  → ou 2 colunas iguais ou coluna nula

Implica

- determinante da matriz diagonal é produto das entradas da diagonal.
- determinante de 1x1 é a própria entrada

- $\det P_{ij} = -1$
- $\det E_{ij}(\alpha) = 1$
- $\det D_i(\alpha) = \alpha$

$$\det\begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior

→ do tipo
$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$
quadrada

$\det(A) =$ produto das entradas da diagonal

↳ se A é matriz triângular superior

→ Para calcular det A para A sendo qualquer matriz quadrada

→ MEG para ficar em escada de linhas → fica em triangular superior

$\det(A) =$ Multiplicar entradas da diagonal

Matriz 2x2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$|EA| = |E||A|$$
↳ matriz elementar

→ A é inversível $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ / se ñ é inversível → $|A| = 0$

$$\boxed{|AB| = |A|\,|B|}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$|A^T| = A$$
↳ apenas em matrizes quadradas

$$|E^T| = |E|$$

Matriz triangular superior

quadrada

$$\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & u_{33} & \cdots & 0 \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & \end{bmatrix}$$

→ transposta da matriz triangular superior

→ Como $|A^t| = |A|$, então det triangular inferior = det triangular superior

→ Logo $\det A = u_{11}\, u_{22} \ldots u_{nn}$

↳ determinante da matriz triangular inferior é o produto das entradas da diagonal.

— // —

$\det A = 0 \rightarrow$ 2 colunas iguais ou coluna nula

pq $|A^t| = |A|$

↳ $|A| = 0$ se linha nula ou linhas iguais

Formula de Laplace

Sendo $A \rightarrow$ matriz quadrada de ordem n

Submatriz $A_{ik} \rightarrow$ quadrada, ordem $n-1$, ao retirar uma linha e coluna a A

Menor (ik) $\quad M_{ik} = \det |A_{ik}|$

Cofator (ik) $\quad C_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, C_{ik}$$

→ Formula de Laplace com extensão na linha

linha i definida e fixa

→ podemos escolher coluna / linha de expansão e dá determinante igual.

Matriz dos Cofatores

$$\text{cof } A = [C_{ik}]_{i,k=1,\dots,m}$$

$$C_{ik} = (-1)^{i+k} \det A_{ik}$$

$$(\text{Cof } A)^T = \text{adj } A \rightarrow \text{matriz adjunta}$$

$$\rightarrow A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

↳ A é quadrada

ex:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ \boxed{1 \quad 3 \quad 1} \end{vmatrix} = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

$$= 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 3(1 \times (-1) - 2 \times 3) + 0$$

$$= 21$$

Espaços vetoriais

→ Elementos do espaço vetorial real / espaço linear real são os vetores e os pontos

Espaço vetorial é o conjunto V munido da adição e da multiplicação por escalares e com propriedades:

- $u+v = v+u$
- $u+(v+w) = (u+v)+w$
- Existe elemento neutro: $0 \rightarrow u+0 = u = 0+u$
  ↳ vetor nulo $(0, 0, \ldots, 0)$
- todo o elemento tem simétrico
  $u \rightarrow -u \qquad u+(-u) = 0 = -u+u$
- $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
- $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
- $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
- $1u = u$

Espaço vetorial real $\quad \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2 \ldots a_n \in \mathbb{R}\}$
↳ conjunto

elemento → $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

Subespaço vetorial / linear $\quad S \subseteq V \quad S \neq 0$

↳ S

S é subespaço de V se for fechado para as operações da adição e multiplicação por escalar.
- → S é espaço vetorial
- → S tem operações induzidas pelas operações de V
- → Soma e multiplicação por escalar com vetores de S têm resultado em S.

O vetor nulo 0 pertence sempre a S → subespaço vetorial

Combinação linear de vetores: $\{u_1, u_2, u_3, \dots u_K\}$

↳ qualquer um vetor gerado pela combinação dos vetores multiplicados por escalar.

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_K u_K$$

Expansão Linear → conjunto não vazio, fechado para + e mpe

$\mathcal{L}\{u_1, u_2, \dots, u_K\}$ → Conjunto de todas as combinações lineares de $\{u_1, u_2, \dots, u_K\}$

$$= \{\underbrace{\alpha_1 u_1}_{s_1} + \alpha_2 u_2 + \dots + \underbrace{\alpha_K u_K}_{s_K} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K \in \mathbb{R}\}$$

↳ Cria um subespaço linear de V

Conjunto Gerador: $L(\{u_1, u_2, \dots, u_K\})$

pois $V = L(\{\dots\})$

Independência Linear

Os vetores $u_1, u_2, \dots, u_K$ são linearmente independentes se:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_K u_K = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_K = 0$$

A única solução da matriz dos vetores $u_1, u_2, \dots, u_K$ aumentada pelo vetor coluna é a solução Trivial.

Método:

→ Matriz constituída pelos vetores
→ Calcular característica da matriz
→ Se car A = nº colunas, SEL é possível e determinado

car A = dim A

linearmente independentes

Se $m \geq k$ os vetores podem ser linearmente independentes
se $m < k$ os vetores são linearmente dependentes

m: número de colunas
k: car (A)

Linearmente dependente: Os vetores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ são L.D se e só se um deles pode ser escrito como combinação linear de outros.

Base

Base: Qualquer conjunto linearmente independente que gere V
↳ todo o espaço vetorial tem uma base (tem infinitas bases (exceto $V=\{0\}$))

Base canónica: Uma base cujo vetores tenham todos uma entrada igual a 1 e todas as outras nulas

ex: $\mathcal{E}_m = \{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^m$, dita a base canónica de $\mathbb{R}^m$

↳ Qualquer vetor de um espaço vetorial V exprime-se com uma combinação linear única dos vetores de uma base

Vetor das coordenadas

Um vetor pode ser expresso por: $u_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$, usando a base ordenada $B = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ de um espaço vetorial.

Onde $u = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_k b_k$

→ Definindo uma base, um vetor u é definido por uma coluna com os valores de $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, sendo estes as soluções da combinação linear.

$$B x = u \rightarrow B u_B = u$$

Propriedades $(u+v)_B = u_B + v_B$ $\quad (\alpha u)_B = \alpha u_B$

→ Função é injetora e sobrejetora (Bijetora):

$T: V \to \mathbb{R}^k$. → Cada vetor u tem um conjunto de coordenadas u_B único, para a base B
↗ Injetora

$u \curvearrowright u_B$

→ Como V é o conjunto de todas as combinações lineares da Base B, todos os elementos de $\mathbb{R}^k$ tem correspondente um vetor u.
> Sobrejetora

(Conjunto de vetores de V são L.I sse $(u_1)_B, \dots, (u_k)_B$ são L.I, para uma base B de V).

Dimensão de um espaço vetorial é a cardinalidade de uma base de V (dim V)

↳ bases do mesmo espaço vetorial têm cardinalidade igual.

$\dim \mathbb{R}^n = n$ → número mínimo de vetores da base

Cardinalidade da base é numero de vetores da base

Base. Um subconjunto de k vetores L.I de V, é base de $\mathbb{R}^k$

cardinalidade da base

V tem dim = k

↳ Teorema Se V tem dim = K

→ Um subconjunto de V com m vetores $m > k$ é linearmente dependente

→ Um subconjunto de V com p vetores L.I $p < K$ está contido numa base de V.

→ Um conjunto gerador de V, contém uma base de V

Bases em espaços de Matrizes

→ Espaço $M_{K \times M}(\mathbb{R})$ é aquele constituído por matrizes reais do tipo $K \times M$

__Base ordenada canónica__ → conjunto ordenado constituído pelas matrizes com entradas todas nulas menos uma, igual a 1.

↳ __ordem__: Entrada (11), percorre primeira linha.

Ex: $M_{2\times2}(\mathbb{R})$: $\beta = \left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$

__Dimensão__: $\dim M_{K\times M}(\mathbb{R}) = K \times M$ ↳ número de vetores da base

Qualquer matriz de $M_{K\times M}(\mathbb{R})$ é uma combinação linear das matrizes da base de $M_{K\times M}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix} = \alpha_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + \alpha_4\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Logo $A_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ → Vetor que pertence a $\mathbb{R}^4$

↓

A base onde o vetor está é que define o objeto

Logo $T: M_{M\times K}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{M\times K}$

$$A \longrightarrow A_B \to \in \mathbb{R}^{M\times K}$$

→ Matrizes são linearmente independentes se e só se: vetores das das coordenadas na base canónica são L.I

$A_B: (1,1,1,1)$ $B_B(1,1,1,0)$ $C_B(0,0,0,.5)$

$$\begin{bmatrix}A_B B_B C_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\\1&0&.5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\underline{1}&1&0\\0&\underline{-1}&-.5\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Base de S: $B = (A, B)$ $\quad$ $A \cdot B$ L.I, $C \in \mathcal{L}(\{A_B, B_B\})$

$\dim S = 2$

Espaço de polinômios

Espaço P_m → polinômios de grau igual ou menor a m:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m$$

↓

Um polinômio de P_m

Base canônica de P_m

Conjunto ordenado $P_m = (1, t, \ldots, t^m)$

$1, 0+1t, 0+0t+t^2$

Vetores coordenados de um polinômio em $\mathbb{R}^m$

$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m)$ → é também o vetor coordenado do polinômio na base canônica

$\dim P_m = m+1$

↳ porque há m "a_m" e um a_0 na base canônica

Subespaços associados à matriz

→ Núcleo

→ Espaço das linhas

→ Espaço das colunas

Núcleo da matriz A → $N(A) = \{0\}$ se A é possível e determinada/inversível

↳ $N(A)$ → conjunto das soluções do sistema de eq linear $Ax = 0$

$N(A) \to \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}$

↓

subespaço de vetores de $\mathbb{R}^m$ → m é nº de colunas de A

↳ fechado para + e mpe

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$ → Resolver $Ax = 0$ para ter $N(A)$

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Solução de $N(A)$: $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 3z - 3w,\ y = z + w\}$

independente

dependente

dependente

(x, y, z, w)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z-3w \\ z+w \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z \\ z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3w \\ w \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{(3,1,1,0), (-3,1,0,1)\}$ é base de $N(A)$, pois é L.I

$\dim N(A) = 2$

Espaço das linhas da matriz A $\qquad$ Dim $C(A) = car\, A$

$L(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^m$, com A de m linhas

↳ gerado por vetores $L_1, L_2, \ldots, L_k$

$L(A) = \{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots + \alpha_k L_k : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$

Espaço das colunas da matriz A $\qquad$ Dim $L(A) = car\, A$

$C(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^k$, com A com K colunas

$C(A) = \{\beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \ldots + \beta_m C_m : \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}\}$

Teorema

→ Ao aplicar op. elementares sobre A e obter B:

$L(A) = L(B) \qquad \dim(L(A)) = car\, A = n^{\circ}$ pivôs

→ Linhas não nulas da matriz em escada de linhas são L.I e formam base de $L(A)$

→ Base de $C(A)$ são os vetores coluna originais que em escada de linhas, têm pivô.

$\dim(L(A)) = \dim(C(A)) = n^{\circ}$ pivôs $= car(A) = n =$ variáveis dependentes

$car\, A^t = \dim L(A^t) = \dim(C(A)) = car\, A$

$\dim(N(A)) =$ nº var independente $= n - \text{car}\,A$

Teorema das dimensões:

$\dim(N(A)) + \dim(L(A)) = n \rightarrow$ nº colunas

$\rightarrow$ car $A^T =$ car A

Obter base de $\mathbb{R}^n$, adicionando vetores

base de $\mathbb{R}^5$ que contenha $u_1 = (1,2,-1,-2,1)$, $u_2 = (-3,-6,5,5,-8)$
$u_3 = (1,2,-1,0,4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ -3 & -6 & 5 & 5 & -8 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{são L.I}$$

Como pivôs estão na 1ª, 3ª e 4ª coluna:

Base de $\mathbb{R}^5$: $\{u_1, u_2, u_3, (0,1,0,0,0), (0,0,0,0,1)\}$

$u_3 \rightarrow u_3$ ou $(0,0,0,2,3)$

u_2 ou $(0,0,2,-1,-5)$

$\rightarrow L(A^T) = C(A)$

$\rightarrow Ax = b \rightarrow$ é possível $\Leftrightarrow b \in C(A)$

$\rightarrow$ Se $Ax = b$ é possível então solução S:

$$S = \{x_p\} + N(A)$$